basque center for applied mathematics

Working Seminar

(APDE-Analysis of Partial Differential Equations

Harmonic Analysis)

**February 17, 2017, 16:30-18:00**


## Marilina CARENA

**CONICET y Universidad Nacional del Litoral, Argentina**


# PRESERVACIÓN DE LA CONDICIÓN DE MUCKENHOUPT A LO LARGO DE LAS ÓRBITAS QUE CONVERGEN A FRACTALES AUTOSEMEJANTES

El papel del operador maximal de Hardy-Littlewood| $M$ es central en el estudio de propiedades de acotación de ciertos operadores clásicos en el análisis armónico. Un contexto natural para la acotación en $L^p$ y el tipo débil $(1, 1)$ del operador $M$ en espacios métricos de medida es la estructura de espacio de tipo homogéneo. Existen varias maneras de medir los grados de homogeneidad en tales espacios: dimensión métrica finita (Assouad), propiedad de duplicación (de Guzmán, Coifman, Weiss), normalidad (Ahlfors, Macías, Segovia) y pesos $A_p$ (Muckenhoupt) son los más conocidos y usados en análisis armónico. La teoría desarrollada por Muckenhoupt en [Muck72] provee condiciones necesarias y suficientes sobre un peso (una densidad positiva) $w$ para obtener estimaciones del tipo $||Mf||_{L^p(w\,d\mu)} \leq C_{p,w}\|f\|_{L^p(w\,d\mu)}$ para el operador maximal $M$. Estas funciones $w$ son conocidas con el nombre de pesos de Muckenhoupt en $A_p$.

Por otra parte, los resultados obtenidos por Mosco en [Mos97] prueban que los fractales autosimilares clásicos presentan una propiedad de homogeneidad precisa. Por lo tanto, en dichos fractales, el operador maximal de Hardy-Littlewood tiene un buen comportamiento.

Estos conjuntos fractales pueden ser obtenidos como puntos fijos de la técnica de iteración introducida por Hutchinson, a partir de un sistema iterado de funciones (IFS) dado. Partiendo de un espacio de medida inicial, se genera por iteración una sucesión que converge, en una métrica precisa, al único punto fijo de la transformación inducida por el IFS. Este espacio límite es el conjunto fractal equipado con la correspondiente medida invariante soportada en él, y la sucesión aproximante cuyos elementos son espacios de medida, es llamada órbita de Hutchinson generada por el IFS.

Ya que por otro lado la unicidad del teorema del punto fijo de Banach nos permite llegar al mismo límite sin importar cual es el espacio inicial, nos preguntamos cómo debe ser el mismo para poder asegurar propiedades de acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood en los espacios aproximantes de manera uniforme.

Obtuvimos resultados positivos cuando el espacio inicial posee una propiedad más fuerte que la de ser espacio de tipo homogéneo, que es conocida como normalidad Ahlfors. Como consecuencia de estos resultados podemos obtener la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood uniformemente a lo largo de la órbita.

Además, aunque ejemplos muestran que la propiedad de duplicación en general no es preservada a lo largo de la órbita aún cuando el espacio inicial sea un espacio de tipo homogéneo definido por un peso de Muckenhoupt, probamos que la sucesión aproximante es una familia de espacios *upper doubling* de manera uniforme. Esta nueva clase de espacios métricos de medida fue introducida en [Hyt10], y generaliza a los espacios de tipo homogéneo, por lo que tienen un rol central en el desarrollo reciente de la teoría del análisis armónico no-doubling. Para probar este resultado demostramos que los elementos de la órbita de Hutchinson satisfacen la propiedad de duplicación excepto quizás para radios que decrecen a cero cuando el paso de la iteración crece, y en este sentido decimos que la propiedad de duplicación del límite es alcanzada gradualmente.

La idea de la exposición es definir todos los conceptos básicos involucrados para comprender los resultados mencionados.

Referencias


[Hyt10] Tuomas Hytonen, A framework for non-homogeneous analysis on metric spaces, and the RBMO space of Tolsa, Publ. Mat. 54 (2010), no.2, 485{504.

[Hut81] John E. Hutchinson, Fractals and self-similarity, Indiana Univ. Math. J. 30 (1981),no. 5, 713{747.

[Mos97] Umberto Mosco, Variational fractals, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 25 (1997), no. 3-4, 683{712 (1998),

[Muck72] Benjamin Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function,Trans. Amer. Math. Soc., (1972), 165:207{226.2