Courses 2021-22

Variedades complejas y geometría Kähler

M. Fernández
(UPV/EHU)

March 1st – May 5th, 2022 (2 weeks break for Easter)
Tuesday and Thursday (16 sessions)
16:00 - 18:00 (a total of 32 hours)

Note that this course will be given in Spanish

La geometría de las variedades complejas y, en particular, de las variedades Kähler es un área muy activa debido no solo a su intersección con varias ramas de las Matemáticas (como la geometría diferencial, el análisis complejo o la geometría algebraica) sino que también por ser una herramienta fundamental en partes importantes de la Física Teórica.

El principal objetivo del curso es el estudio geométrico y topológico de las variedades complejas y de las variedades Kähler. Se introduce la cohomología de Dolbeault de una variedad compleja, y se muestra el teorema de Hodge y el teorema fuerte de Lefschetz para variedades compactas Kähler. Ese estudio será útil para los estudiantes graduados en matemáticas. y física te rica, y ayudar a los estudiantes del Máster Modelización e Investigación Matemática, Estadística y Computación a completar su formación geométrica/topológica y, al mismo tiempo, a comprender y relacionar los objetos y resultados geométricos y/o topológicos que se enseñan en el curso "Geometría de variedades" as como en el curso "Topología algebraica", ambos de 6 créditos cada uno, y que actualmente se imparten en la Universidad de Zaragoza en el 2 cuatrimestre del curso 2020/2021.

El curso que se propone tiene una duración de 32 horas, y consta de tres partes distribuidas como sigue. En las dos primeras se introducen los conceptos y resultados básicos, y es en la tercera parte del curso donde se muestran los resultados que motivan el curso. En concreto, con la primera parte del curso, de 10 horas de duración, se espera que los estudiantes se familiaricen con el concepto de variedad compleja, aplicación holomorfa, subvariedad compleja y, en particular, de variedad proyectiva compleja. La definición usual de variedad compleja es la de un espacio topológico con un atlas formado por cartas coordenadas complejas cuyas funciones de transición son aplicaciones holomorfas. Sin embargo, nosotros necesitaremos una definici n geométrica, la cual está dada en términos de un tensor denominado estructura casi compleja. Se introduce el tensor de Nijenhuis de una tal estructura y se muestra un esbozo de la demostración del teorema de Newlander y Nirenberg, el cual establece que una condición necesaria y suficiente para que una variedad diferenciable, de dimensión par, sea una variedad compleja es que sobre dicha variedad exista una estructura casi compleja cuyo tensor de Nijenhuis se anula; en tal caso, la estructura casi compleja se denomina estructura compleja. Para una variedad compleja, se muestra también la bigraduación de las formas diferenciales complejas, la descomposión de la diferencial exterior en la suma del operador de Dolbeault y del operador anti-Dolbeault, y se introducen los grupos de cohomología de Dolbeault, los cuales son invariantes de la estructura compleja.

La segunda parte del curso, de 8 horas de duración, se dedica al estudio de variedades complejas con métricas hermíticas. Sobre una variedad compleja M con una métrica hermítica, se define el operador estrella de Hodge y el producto L^2 de formas. Entonces, se considera el adjunto de la diferencial exterior de M así como el adjunto del operador de Dolbeaut y el adjunto del operador anti-Dolbeault. Se introducen los correspondientes operadores de Laplace y se prueba la dualidad de Serre para cualquier variedad compleja hermítica y orientable.

La tercera y última parte del curso, de 14 horas de duración, se dedica al estudio de las variedades Kähler. Estas son variedades complejas que gozan de propiedades analíticas y algebraicas especialmente buenas. La clave para ello es que una variedad Kähler es, a la vez, compleja, simpléctica y riemanniana, de forma que las tres estructuras son compatibles en el siguiente sentido: existe una estructura compleja asociada a la forma simpléctica tal que la métrica definida por ambas (la forma simpléctica y la estructura compleja) es definida positiva. Las condiciones de compatibilidad dotan a una variedad Kähler de una rigidez que resulta primordial en geometría compleja. Se demuestra que las métricas Kähler son euclídeas hasta el orden dos, lo que confiere mucha rigidez a la métrica, y permite probar las identidades Kähler. Esas identidades relacionan el operador de Dolbeault con el adjunto del operador anti-Dolbeault, y viceversa. Además, permiten probar que los tres operadores de Laplace son el mismo salvo una constante. Se completa el curso mostrando el Teorema de descomposición de Hodge para variedades compactas Kähler y el teorema fuerte de Lefschez, de los cuales se deducen interesantes obstrucciones topológicas a la existencia de métricas Kähler sobre una variedad compacta compleja. Se muestra entonces la variedad de Kodaira-Thurston, la cual es un interesante ejemplo de variedad compleja y simpléctica que no admite ninguna métrica Kähler.

PROGRAMA

- Variedades complejas. El espacio proyectivo complejo. Funciones holomorfas y aplicaciones holomorfas. Subvariedades complejas. El espacio proyectivo complejo. Variedades proyectivas complejas: Teorema de Chow.
- Variedades complejas como variedades reales: estructuras casi complejas. El tensor de Nijenhuis, Teorema de Newlander y Nirenberg. Mas sobre la geometría casi compleja: variedades simplécticas.
- Formas diferenciales sobre variedades complejas. Bigraduaci n de campos de vectores y de formas diferenciales. El operador de Dolbeault y el operador anti-Dolbeault. Cohomolog a de Dobeault. Formas holomorfas. El fibrado canónico.
- Métrica hermítica. Los operadores adjuntos del operador de Dolbeault y del anti-Dolbeault y sus laplacianos. Formas armónicas. Dualidad de Serre.
- Métrica Kähler. La métrica de Fubini-Study sobre el espacio proyectivo complejo. Subvariedades complejas de una variedad Kähler; las variedades proyectivas

complejas son Kähler. El operador de Lefschetz de una variedad Kähler y su adjunto. Las identidades Kähler.
- Teorema de Hodge para variedades de Riemann compactas. Teorema de descomposiciçon de Hodge en variedades Kähler. Consecuencias topológicas: los números de Betti impares de cualquier variedad compacta Kähler son pares. Ejemplos de variedades complejas y de variedades simplécticas que no admiten ninguna métrica Kähler. Teorema fuerte de Lefschetz.

Entre los libros clásicos en esta materia se encuentran las referencias [8], [12], [24] y [25]. Como material de texto básico incluyo las referencias [2], [5], [6] y [14], y como libros de consulta las referencias [3], [7], [9], [10], [15] y [20].

BIBLIOGRAFÍA:

[1] Th. Aubin: *A course in differential geometry*, American Mathematical Society, 2001.
[2] W. Ballmann: *Lectures on Kähler manifolds*, ESI Lectures in Mathematics and Physics, European Mathematical Society, 2006.
[3] R. Bott, L. W. Tu: *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1982.
[4] F. Brickell and R. S. Clark: *Differentiable manifolds, an introduction*, Van Nostrand, 1970.
[5] A. Cannas da Silva: *Lectures on Symplectic Geometry*, Springer 2008.
[6] E. Cattani: *Introduction to Kähler manifolds*, The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, 2010.
[7] I. Chavel: *Riemannian Geometry*, *A Modern Introduction*, Cambridge University Press, 1995.
[8] S.S. Chern: *Complex manifolds without potential theory* (with an appendix on the geometry of characteristic classes). Universitext. Springer-Verlag, New York, second edition, 1995.
[9] M. P. do Carmo: *Riemannian Geometry*, Birkh user, 1993.
[10] S. Gallot, D. Hullin, J. Lafontaine: *Riemannian Geometry*, Springer, 2004.
[11] J. M. Gamboa y J. M. Ruiz: *Iniciación al estudio de las variedades diferenciables*, 2ª Edición, Sanz y Torres, 2006.
[12] Ph. Griffiths, J. Harris: *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994.
[13] N. Hitchin: *Differentiable manifolds*, 2014. Notas disponibles en https://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/
[14] D. Huybrechts: *Complex geometry. An introduction*. Berlin: Springer, 2005.
[15] D. D. Joyce: *Riemannian holonomy groups and calibrated geometry*, Oxford Graduate Texts in Mathematics 12, Oxford University Press, 2007.
[16] K. Kodaira: *On the structure of compact complex analytic surfaces*, I, Amer. J. Math. 86 (1964), 751--798.
[17] J. Lafontaine: *Introduction aux Variétés Différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble 1996.
[18] J. M. Lee: *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer-Verlag, 2003.
[19] A. Moroianu: *Lectures on Kähler geometry*, London Mathematical Society Student Texts 69, Cambridge University Press, 2007.
[20] A. Tralle, J. Oprea: *Symplectic manifolds with no Kähler structure*, Lecture Notes in Math. 1661, Springer–Verlag, 1997

[21] W. P. Thurston. *Some simple examples of symplectic manifolds*. Proc. Amer. Math. Soc., 55 (1976), 467–468.
[22] L. W. Tu: *An introduction to manifolds and Lie groups*, Universitext, Springer, 2008.
[23] F. Warner: *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer Verlag, 1983.
[24] A. Weil: *Introduction à l'étude des variétés kählérienne*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VI. Actualités Sci. Ind. no. 1267. Hermann, Paris, 1958.
[25] R. O. Wells: *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 65, Springer, New York, 3ª edición, 2008.

***Registration is free, but inscription is required before 22nd February, 2021:** So as to inscribe go to https://forms.gle/fR6FVnu271CoWH2J7 and fill the registration form.