

Functional Analysis and Qualitative Theory of PDEs

E.Zuazua
Ikerbasque & BCAM
zuazua@bcamath.org
www.bcamath.org/zuazua

October 2012

Contents

1	Introduction	3
1.1	Motivation	3
1.2	Examples of Partial Differential Equations	3
1.3	Basic principle and goal of these lectures	5
1.4	Some analytical tools	5
1.5	Contents of these notes	5
2	The Heat Equation	6
2.1	The Dirichlet Problem	6
2.2	The Cauchy Problem	9
2.3	Development of functions in the Dirac basis. Large time behavior	16
2.4	Scaling: A basic tool for computing asymptotics.	23
2.5	How Universal is the Law of Asymptotic Simplification ?	24
3	The Wave Equation	28
3.1	The Dirichlet problem	28
3.2	The Damped Wave Equation	29
3.3	Boundary damping	31
3.4	Internal damping	32
3.5	Damping localized on narrow sets	35
4	Convergencia al equilibrio	38
4.1	Presentación	38
4.2	Sistema gradiente en dimensión finita	39
4.3	La ecuación del calor lineal	41

4.4	Sistemas gradiente y métodos de descenso	46
4.5	Mínimos cuadrados	48
5	The Burgers equation	51
5.1	Presentation	51
5.2	La transformación de Hopf-Cole	52
5.3	Viscosidad evanescente	56
6	Splitting	62
6.1	Presentación	62
6.2	Peaceman-Rachford	64
6.3	Douglas-Rachford	68
6.4	θ -método	69
6.5	Aplicación del “splitting” a la ecuación de Burgers	71
7	Ecuaciones elípticas de convección-difusión	72
8	Semigrupos no-lineales	76
8.1	El problema elíptico	77
8.2	El método Galerkin	79
8.3	Discretización temporal	82
8.4	Conclusión	85

1 Introduction

1.1 Motivation

Most of the phenomena of nature, Physics and engineering require of Partial Differential Equations (PDE) modeling. Understanding the solutions of these PDEs and their properties is then of paramount importance. Each PDE has its own properties. The literature is abundant, and the field is endless growing. But, little by little, the Functional Analysis point of view is contributing to unify it. These lectures will be devoted to analyze from a Functional Analytical point of view some basic PDEs such as the heat, the wave and the Burgers equation. This will also allow us to develop some tools that will later be useful from a numerical analysis point of view.

1.2 Examples of Partial Differential Equations

Elliptic equations:

* *Laplace equation*

$$-\Delta_x u = f$$

$$\left[\Delta_x = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right] \quad N = 1, 2, 3,$$

* *Stokes equation*

$$\begin{cases} -\Delta_x \vec{u} &= \vec{f} + \vec{\nabla}_x p \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0 \end{cases}$$

* *Plate equation*

$$\Delta_x^2 u = f$$

* *The Lamé system is 3-d elasticity*

$$\mu \Delta_x \vec{u} - (\lambda + \mu) \vec{\nabla}_x \operatorname{div}_x \vec{u} = \vec{f}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Elliptic equations describe the stationary (time independent) solutions of evolution equations (hyperbolic and parabolic ones).

Parabolic Equations:

- * The
- heat equation*
- :

$$u_t - \Delta_x u = 0.$$

- * The
- Stokes equations*
- :

$$\begin{cases} \vec{u}_t - \nu \Delta \vec{u} = \vec{\Delta} p \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \end{cases}$$

- *
- Navier-Stokes equations*
- :

$$\begin{cases} \vec{u}_t - \nu \Delta \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \vec{\nabla} p \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \end{cases}$$

- *
- Convection-diffusion equations*
- :

$$u_t - \Delta u + \operatorname{div}(\vec{f}(u)) = 0$$

Hyperbolic equations:

- * The
- wave equation*
- :

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

(arises in the context of acoustic waves, vibrations of strings, membranes).

- * The
- system of elasticity*
- :

$$\vec{u}_{tt} - \mu \Delta \vec{u} - (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

(relevant in vibrations of 3-d elastic bodies).

- *
- Maxwell equations*

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \operatorname{curl} \vec{M} \\ \vec{M}_t = -\operatorname{curl} \vec{E} \end{cases}$$

- *
- Hyperbolic conservation laws*
- :

$$u_t + \operatorname{div}(\vec{f}(u)) = 0.$$

Other closely related and significant models are also worth mentioning.

- *
- Schrödinger equation*
- :

$$i u_t + \Delta u = 0,$$

(which arises in Quantum Mechanics and Optics).

* *Airy and KdV equations:*

$$u_t + u_{xxx} = 0$$

$$u_t + u_{xxx} + u_x + uu_x = 0$$

relevant in the theory of water waves and solitons.

* *Hamilton-Jacobi equations:*

$$u_t + H(\nabla_x u) = 0.$$

1.3 Basic principle and goal of these lectures

Understanding completely the dynamics of evolution processes is too difficult. However, for many relevant systems an asymptotic simplification process occurs and the large time behavior is often given by simpler equations allowing a quite explicit and complete analysis.

The most typical example is that of an evolution equation in which solutions converge, as time tends to infinity, to the solutions of the corresponding elliptic (time-independent) equation.

In these lectures we present some important examples in which this asymptotic simplification occurs and describe some mathematical techniques allowing to explore this issue.

The topic can be formulated to a large extent in an unifying Functional Analysis setting. These lectures will then also serve to revisit some fundamental concepts of Functional Analysis.

1.4 Some analytical tools

- Fourier & Harmonic Analysis.
- Functional Analysis (spaces, inequalities).
- Semigroup Theory.
- Interpolation.
- Distributions.

.....

1.5 Contents of these notes

The first two sections are devoted to analyze some fundamental properties of the heat and the wave equation. In particular we shall analyze their stability properties as $t \rightarrow \infty$

and their asymptotic simplification. In Chapter 4 we shall describe how the trend of these systems to stabilization can be understood within a more general theory of gradient systems, that also leads to important computational methods of descent for optimization and minimization of functionals. In particular, we shall describe how these ideas can be applied in the context of least squares.

We then address the Burgers equation which is a simplified version of the fundamental equations in Fluid Mechanics: The Euler and Navier-Stokes equations.

These models in Fluid Mechanics are relevant in a variety of contexts such as meteorology, oceanography, climate, aeronautics, the human cardiovascular system, etc. Uniqueness and regularity of the 3-d Navier-Stokes equations is still one of the open Millennium problems. But for Burgers equations, thanks to the Hopf-Cole transformation, solutions can be computed explicitly and the vanishing viscosity limit be computed so to obtain entropy solutions of the inviscid hyperbolic version.

In the Burgers equation viscosity or diffusion and nonlinear convection compete. This is then a natural model to develop splitting methods, following the book by R. Glowinski [14].

The Burgers equation also motivates the last two topics addressed in the Notes. On one hand, elliptic equations of convection-diffusion nature in which existence of solutions can be proved combining the variational theory of elliptic equations and fixed point arguments. On the other, the theory of nonlinear semigroups, that based on time discretization, allows solving a large class of nonlinear diffusion problem, including Burgers like equations.

2 The Heat Equation

2.1 The Dirichlet Problem

Given a bounded domain Ω we consider the heat equation with Dirichlet boundary conditions:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \Omega. \end{cases}$$

Here $u = u(x, t)$ where $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ and $\Delta = \Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ and $\cdot_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Fourier Analysis allows obtaining the explicit form of solutions.

Consider first the eigenvalue problem

$$\begin{cases} -\Delta\phi_j = \lambda_j\phi_j & \text{in } \Omega \\ \phi_j = 0 & \text{on } \partial\Omega, j = 1, \dots, \infty \end{cases}$$

The spectral theory for compact self-adjoint operators in Hilbert spaces allows showing

that the problem admits an increasing sequence of positive eigenvalues, of finite multiplicity, tending to infinity

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow \infty$$

so that the corresponding eigenfunctions $\{\phi_j\}$ constitute an orthonormal basis of $L^2(\Omega)$.

Solutions of the heat equation can now be easily developed in Fourier series in this eigenfunctions basis:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\lambda_k t} \phi_k(x) \\ \varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \phi_k(x) \\ \varphi_k &= \int_{\Omega} \varphi(x) \phi_k(x) dx. \end{aligned}$$

According to the orthogonality property of eigenfunctions the following holds for the time evolution of the L^2 -norm of solutions:

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 e^{-2\lambda_k t}.$$

This identity illustrates the well-posedness of the system in the forward sense* † and provides an easy bound for the semigroup map $S(t)$ that associates to any initial datum φ the solution $u(t)$ at time t :

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} = e^{-\lambda_1 t}.$$

By the contrary, the same identity illustrates the strong *time-irreversibility* of the system:

$$\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(t) e^{2\lambda_k t}.$$

*Backward uniqueness for the heat equation is also an important topic in the context of inverse and control problems theory. However, the backward heat equation is one of the most paradigmatic example of ill-posed problem in the sense of Hadamard. However, energy estimates allow proving that, indeed, backward uniqueness holds and actually to yield an upper bound of the growth rate of the energy of solutions in time in terms of the frequency number of the initial datum.

†This Fourier series representation also allows proving, in agreement with the time-analyticity of solutions (since, indeed, the heat equation is one of the so-called analytic semigroups) that the vanishing properties of solutions in a finite time interval necessarily extend to infinity time. And this is often of much use in control theory as well. For instance, if $u(x_0, t) \equiv 0$ for $t \in [0, T]$, then, necessarily, $u(x_0, t) \equiv 0$ for all $t > 0$. And, it is not hard to see that this holds if and only if either x_0 is in the zero set of some eigenfunction ϕ_k or if $u \equiv 0$.

Time irreversibility and the *smoothing property* of the heat semigroup are strongly linked. The following holds:

$$\varphi = u(0) \in L^2(\Omega) \Rightarrow u(t) \in H^s(\Omega), \forall s > 0.$$

Indeed,

$$\|u(t)\|_{H^s(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2s} u_k^2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2s} e^{-2\lambda_k t} \varphi_k^2 \leq C_s \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 < \infty.$$

Consequently, the heat equation possesses the following main properties:

- Smoothing
- Time Irreversibility
- Dissipation of energy.

The energy dissipation law can also be obtained easily by the *energy method* that consists, roughly, on multiplying the equation by suitable functions of the unknown and integrating by parts. Indeed, integrating with respect to the space variable x in the identity

$$(u_t - \Delta u)u = 0$$

it follows that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = 0.$$

In other words,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

and, using the Poincaré inequality, we get

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \leq -\lambda_1 \int_{\Omega} u^2$$

and consequently,

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_1 t} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

According to this computation solutions of the heat equation on a bounded domain Ω decay exponentially in time with a rate $\lambda_1(\Omega)$. This is in agreement with the prediction we did by using the Fourier expansion of solutions. It is however important to note that the energy method is more flexible and does not require an orthonormal basis of eigenfunctions to be applied.

The computation above is based on the following characterization of the best constant in the Poincaré inequality:

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx}{\int_{\Omega} \varphi^2 dx}$$

which does indeed yield

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \geq \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi^2.$$

In order to better understand the asymptotic behavior of solutions as a function of the domain Ω where the equation holds it is important to take into account that

$$\lambda_1(\Omega) \text{ decreases as } \Omega \text{ increases.}$$

More precisely, by scaling the domain Ω by means of a constant factor $R > 0$

$$\Omega \longrightarrow R\Omega$$

we see that

$$\lambda_1(\Omega) \rightarrow \lambda_1(R\Omega) = \frac{1}{R^2} \lambda_1(\Omega).$$

In particular, the computations above do not yield any decay rate for the *Cauchy problem* since, as $R \rightarrow \infty$, $\lambda_1(R\Omega) \rightarrow 0$. Thus, when $\Omega = \mathbb{R}^n$, which is a mathematical idealization of a very large domain in which the boundary effects do not have a significant influence on the solution, the computation above does not provide any decay rate..

The following question arises: *Do solutions decay at all when $\Omega = \mathbb{R}^n$?*

2.2 The Cauchy Problem

Consider now the Cauchy problem in the whole space:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

The solution of the Cauchy problem can be explicitly written by *convolution with the gaussian heat kernel*:

$$u = G(\cdot, t) *_{x} \varphi(\cdot).$$

More explicitly,

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x - y, t) \varphi(y) dy$$

where

$$G(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

is the fundamental solution of the heat equation, the gaussian kernel.

It satisfies the following properties:

- $G_t - \Delta G = 0$, in $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$
- $G(t) \rightarrow \delta_0 = \text{Dirac delta at } x = 0$, as $t \rightarrow 0^+$;
- Conservation of mass:

$$\int G(x, t) dx = 1, \quad \forall t > 0.$$

- L^p -decay

$$\|G(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = C_p t^{-\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

In particular

$$\|G(t)\|_{L^1} = \int G dx = 1, \quad \|G(t)\|_{L^\infty} \leq ct^{-\frac{N}{2}}.$$

- L^p -decay of derivatives.

$$\|D_x^\alpha G(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = C_{p\alpha} t^{-\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{|\alpha|}{2}}$$

- We also observe that that the fundamental solution has the *self-similar form*:

$$G = t^{-\frac{N}{2}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad f(z) = (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right).$$

The fundamental solution of the heat equation can be computed explicitly in several forms. One of them is by direct application of the basic properties of the *Fourier transform*. The fundamental solution solves the following system in the physical space:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \\ u(0) = \delta_0. \end{cases}$$

Applying Fourier transform in space we get:

$$\begin{cases} \hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(0) \equiv 1. \end{cases}$$

The solution in the Fourier variables can then be obtained explicitly:

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-|\xi|^2 t}.$$

Finally, applying the inverse Fourier transform we easily obtain that

$$u(x, t) = G(x, t) = (4\pi t)^{-N/2} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right).$$

But, the Fourier analysis provides more information than the explicit form of the solution. Indeed, it indicates that the heat equation dissipates exponentially each Fourier component of the solution with a rate $|\xi|^2$. Consequently,

→ The dissipation rate is very high for the high frequencies.

→ It is very slow for the low ones.

Of course, there is no uniform exponential decay rate. However, one can get a compromise between the strong decay of high frequencies and the weak decay rate of the low ones by introducing extra assumptions on the integrability of the initial datum.

It is important to note that, if no additional assumption on the initial datum is imposed one can not obtain any decay rate. More precisely, the norm of the semigroup $S(t)$ associated with the Cauchy problem as a bounded linear operator from $L^2(\mathbb{R}^N)$ into itself is one for all $t > 0$.

This fact corresponds to a general result in the context of dissipative semigroups in Banach spaces

$$S(t) = e^{At} : X \rightarrow X$$

guaranteeing that either:

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X,X)} = 1, \quad \forall t > 0$$

or

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq C e^{-\omega t} \quad \forall t > 0$$

for suitable constants $C, \omega > 0$.

In particular, if we have a polynomial decay rate of the form

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq c t^{-\sigma},$$

then, necessarily, the semigroup decays exponentially as well.

In the particular case of the semigroup associated with the Cauchy problem for the heat equation, the semigroup is of unit norm. This fact is closely related to the fact that the gaussian heat kernel $G(t)$ is of unit norm in $L^1(\mathbb{R}^N)$ for all $t > 0$ as well. Indeed, according to Young's inequality we have

$$\|S(t)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|G(t) * \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|G(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

and this bound, which does not provide any decay rate, is sharp.

We have discussed the main properties of the gaussian heat kernel. But, in fact, all solutions of the heat equation have similar properties and they can be obtained by the energy method, i.e. multiplying the equation by functions of the unknown and integrating by parts:

- *Conservation of mass.*

Integrating the heat equation with respect to x we get:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} u_t dx - \int_{\mathbb{R}^N} \Delta_x u dx = \frac{d}{dt} \int u dx.$$

Consequently,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx, \quad \text{for all } t > 0.$$

- *Energy dissipation law.*

Multiplying by u and integrating w.r.t. x we get:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx.$$

- *L^p -decay.*

Applying Young's inequality in the representation formula of the solution as convolution of the heat kernel with the initial datum we obtain:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \|G(t) * \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|G(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C_p \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} t^{-\frac{N}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}. \end{aligned}$$

This is true for all $p \geq 1$. The maximal decay rate is achieved for $p = \infty$, the decay rate being $N/2$. When $p = 1$ the L^1 norm does not decay. This is in agreement with the property of conservation of mass.

Note however that the L^p decay property is guaranteed by assuming that the initial datum is in $L^1(\mathbb{R}^N)$. The semigroup does not decay as a bounded linear operator from $L^p(\mathbb{R}^N)$ into $L^p(\mathbb{R}^N)$.

- *Comparison of solutions:* Using the positivity of the heat kernel G it can also be easily seen that $\varphi \geq \hat{\varphi}$ implies that the associated solutions are ordered as well: $u \geq \hat{u}$.

This property may also be obtained by multiplying the equation by $\text{sgn}^-(u - \hat{u})$. Indeed,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^N} (u_t - \hat{u}_t) \text{sgn}^-(u - \hat{u}) - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} \Delta(u - \hat{u}) \text{sgn}^-(u - \hat{u}) dx}_{\geq 0} \\ &\geq \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |[u - \hat{u}]^-| dx. \end{aligned}$$

Here sgn^- stands for the function taking value -1 for $s \leq 0$ and value 0 for $s \geq 0$. On the other hand, $[s]^-$ is the negative part function taking value s for $s \leq 0$ and 0 for $s \geq 0$.

Consequently, taking into account that $\varphi \geq \hat{\varphi}$ we have

$$\int_{\mathbb{R}^N} |[\varphi - \hat{\varphi}]^-| dx = 0$$

and we deduce immediately that

$$\int_{\mathbb{R}^N} |[u - \hat{u}]^-| dx = 0$$

for all $t > 0$ which is equivalent to the fact that $u \geq \hat{u}$.

In order to justify this computation and to avoid the technical difficulties related with the lack of smoothness of the sgn^- function one has to use a regular approximation β_ε of the sgn^- function, such that β_ε is of class C^1 , vanishes at the origin, and is non-decreasing. Using the Green formula one then gets

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \Delta w \beta_\varepsilon(w) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \cdot \beta'_\varepsilon(w) \nabla w = \int_{\mathbb{R}^N} \beta'_\varepsilon(w) |\nabla w|^2 \geq 0.$$

In this way we conclude the decreasing character of the integral

$$\int_{\mathbb{R}^N} B_\varepsilon(u - \hat{u}) dx$$

where $B_\varepsilon(s) = \int_0^s \beta_\varepsilon(z) dz$. Passing to the limit as ε tends to zero we deduce that the integral $\int_{\mathbb{R}^N} |[u - \hat{u}]^-| dx$ decreases as well.

We have seen that most of the properties of solutions of the heat equation can be obtained in two different ways: Using the explicit expression of solutions by convolution with the heat kernel or by integration by parts. The proofs based on integration by parts are much more robust than those that use the explicit representation formula of solutions.

The following is an interesting alternative proof of the L^p -decay property. This method applies to nonlinear parabolic equations and is also useful to obtain L^p estimates for solutions of semilinear elliptic equations. As far as we know, the application of this technique in the context of parabolic equations is due to L. Véron [30].

- Step 1: Multiply the equation by $|u|^{p-2}u$. We get

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} (p-1) |\nabla u|^2 |u|^{p-2} dx = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \leq 0 \\ \Rightarrow & \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

- Step 2: Use of Sobolev's inequality. For instance, in three space dimensions ($N = 3$) the Sobolev inequality reads.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^6 \right)^{1/6} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \right)^{1/2}.$$

On the other hand, from the identities of the first step we have

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int |u|^p dx + (p-1) \int |\nabla u|^2 |u|^{p-2} dx = 0,$$

and, taking into account that

$$\int |\nabla u|^2 |u|^{p-2} dx = \frac{4}{p^2} \int |\nabla [(u)^{p/2}]|^2 dx$$

we get

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int |u|^p dx + \frac{4(p-1)}{p^2} \int |\nabla (u)^{p/2}|^2 dx = 0.$$

The application of the Sobolev inequality in this case yields:

$$\int |\nabla (u)^{p/2}|^2 dx \geq c \left(\int |u|^{3p} \right)^{1/3}$$

and therefore

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int |u|^p dx + \frac{c(p-1)}{p^2} \left(\int |u|^{3p} \right)^{1/3} \leq 0.$$

- Step 3: We now use classical interpolation inequalities (which are in fact a consequence of Hölder's inequality):

$$\|u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^1}^{2p/[3p-1]} \|u\|_{L^{3p}}^{(p-1)/[3p-1]}.$$

Then, using the fact that the L^1 -norm decreases,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int |u|^p dx + \frac{c(p-1)}{p^2} \left[\frac{\|u\|_{L^p}}{\|u\|_{L^1}^{2p/(3p-1)}} \right]^{p(3p-1)/3(p-1)} \leq 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt} \int |u|^p dx + \frac{c(p-1)}{p^2 \|\varphi\|_{L^1}^{2p^2/(p-1)}} \left(\int |u|^p dx \right)^{(3p-1)/3(p-1)} \leq 0. \end{aligned}$$

Consequently, the function

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx$$

satisfies

$$\frac{d\phi}{dt} + C_p (\|\varphi\|_{L^1}) \phi^{(3p-1)/3(p-1)} \leq 0.$$

Solving this differential inequality we get:

$$\phi(t) \leq C_p t^{-\frac{3}{2}(p-1)} \Rightarrow \|u(t)\|_{L^p} \leq C_p \|\varphi\|_{L^1} t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}.$$

Note that this corresponds, when $N = 3$, to the estimate we got using Young's inequality in the convolution identity.

This method of proving L^p estimates applies to more general nonlinear evolution equations like, for instance,

$$u_t - \Delta u + \operatorname{div}(\vec{f}(u)) = 0.$$

Indeed,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(\vec{f}(u)) |u|^{p-2} u dx = - \int_{\mathbb{R}^N} (p-1) \vec{f}(u) |u|^{p-2} \nabla u = - \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(\vec{F}_p(u)) dx = 0,$$

where

$$\vec{F}_p(z) = \int_0^z \vec{f}(s) |s|^{p-2} (p-1) ds$$

and therefore all the contributions coming from the nonlinear term cancel in this computation, leading to the same result as for the linear heat equation.

2.3 Development of functions in the Dirac basis. Large time behavior

According to the estimates above, when the initial datum φ of the Cauchy problem belongs to $L^1(\mathbb{R}^N)$, $t^{\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})}u(t)$ is a bounded trajectory in $L^p(\mathbb{R}^N)$ as $t \rightarrow \infty$.

The following question then arises naturally: *Does the limit*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})}u(t)$$

exist in $L^p(\mathbb{R}^N)$, and, if yes, can we compute it explicitly.

There are, at least, three methods to answer to these questions:

- Developing functions in the basis of delta functions.
- Self-similar variables.
- Scaling.

Let us discuss the first method, based on the possibility of developing functions on the basis constituted by the Dirac delta and its derivatives, the coefficients being the momenta of the function to be developed.

The following holds:

Decomposition Lemma. ([9]). *Assume that $f \in L^1(\mathbb{R}^N; 1 + |x|)$, i.e.*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|(1 + |x|)dx < \infty.$$

Then, there exists $\vec{F} \in (L^1(\mathbb{R}^N))^N$ such that

$$f = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx\delta_0 + \operatorname{div}(\vec{F})$$

and

$$\|\vec{F}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq C_N \| |x|f \|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Moreover, if

$$f \in L^1(\mathbb{R}^N; 1 + |x|^2)$$

then,

$$f = \int f(x)dx\delta_0 - \int f(x)xdx \cdot \nabla\delta_0 + \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha F_\alpha$$

with

$$\sum_{|\alpha|=2} \|F_\alpha\|_{L^1} \leq C_N \| |x|^2 f \|_{L^1}.$$

This decomposition formula can be easily used to analyze the asymptotic behavior of solutions. Recall that

$$u(x, t) = [G(\cdot, t) * \varphi(\cdot)](x).$$

On the other hand, according to the decomposition formula,

$$\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx \delta_0 + \operatorname{div}(\vec{\phi})$$

and, consequently,

$$\begin{aligned} u &= G * \left[\int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx \delta_0 \right] + G * \operatorname{div}(\vec{\phi}) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx [G * \delta_0] + \nabla G * \vec{\phi} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx G + \nabla G * \vec{\phi}. \end{aligned}$$

In other words,

$$u - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx G = \nabla G * \vec{\phi}$$

and therefore

$$\|u - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx G\|_{L^p} \leq \|\nabla G\|_{L^p} \|\vec{\phi}\|_{L^1} \leq C \|\nabla G\|_{L^p} \|x\varphi\|_{L^1}.$$

But, taking into account that,

$$G = t^{-N/2} f(x/\sqrt{t}) \Rightarrow \nabla_x G = t^{-(N+1)/2} F(x/\sqrt{t})$$

we have

$$\|\nabla_x G\|_{L^p} \leq C_p t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}$$

and therefore

$$t^{\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})} \|u - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx G\|_{L^p} \leq C_p t^{-1/2}.$$

We have proved the following result:

Theorem.

- If $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N; 1 + |x|)$, then

$$\|u - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx G\|_{L^p} t^{\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})} \leq C_p t^{-1/2}.$$

- If $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$, then

$$t^{\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})} \|u - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx G\|_{L^p} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Summarizing, roughly speaking, we can say that

$$u \sim \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx G, \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

Proof.

- The first statement has been proved before.
- The second result can be proved by density. Indeed,

$$\exists u_{0,\varepsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) : u_{0,\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_0; \quad \int u_{0,\varepsilon} = \int u_0.$$

Using this approximating sequence and applying the previous result we have:

$$\begin{aligned} \|u - \int u_0 dx G\|_{L^p} t^{\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})} &\leq \|u_\varepsilon - \int u_{0,\varepsilon} dx G\|_{L^p} t^{\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})} + \|u_\varepsilon - u\|_{L^p} t^{\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})} \\ &\leq C_\varepsilon t^{-1/2} + C \|u_0 - u_{0,\varepsilon}\|_{L^1} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

The latter can be guaranteed by taking ε small enough (depending on δ), and then, the first one, once ε is fixed, taking t large enough.

Using more terms of the development on the Dirac basis we can obtain more terms on the asymptotic development of the solution as $t \rightarrow \infty$ as well. In this way we can show, as $t \rightarrow \infty$,

$$u \sim \int_{\mathbb{R}^N} u_0 dx G - \int_{\mathbb{R}^N} x u_0 dx \cdot \nabla G + \dots$$

It is important to observe that every time we add a term in the asymptotic expansion (containing the higher order momentum of the initial datum and the corresponding derivative of the Gaussian kernel) we obtain an extra decay rate of the order of $t^{-\frac{1}{2}}$.

Proof of the Decomposition Lemma. We have to show that

$$u_0 = \int u_0 dx \delta_0 + \text{div}(\vec{V}_0).$$

In one space dimension ($N = 1$) we can compute V_0 explicitly as follows:

$$V_0(x) = \begin{cases} -\int_x^\infty u_0 dx, & x > 0 \\ \int_{-\infty}^x u_0 dx, & x < 0. \end{cases}$$

For this function V_0 we have

$$\frac{dV_0}{dx} = u_0 \quad \text{for } x > 0, x < 0$$

and

$$[V_0]_{x=0} = - \int u_0 dx.$$

Consequently,

$$\frac{dV_0}{dx} = u_0 - \int u_0 dx \delta_0.$$

In several space dimensions the same can be proved integrating along rays. We then obtain

$$\vec{V}_0 = -x \int_1^\infty t^{N-1} u_0(tx) dt.$$

■

The same formula allows to get a L^p -version of the decomposition result. Applying Minkowski's inequality we get

$$\|\vec{V}_0\|_{L_x^p} \leq \int_1^\infty t^{N-1} \|xu_0(tx)\|_{L_x^p} dt.$$

Taking into account that

$$\|xu_0(tx)\|_{L_x^p} = t^{-1-N/p} \|xu_0(x)\|_{L_x^p} \leq \|xu_0(x)\|_{L_x^p} \int_1^\infty t^{N(1-\frac{1}{p})-2} dt$$

we obtain

$$\|\vec{V}_0\|_{L_x^p} \leq \|xu_0(x)\|_{L_x^p} \int_1^\infty t^{N(1-\frac{1}{p})-2} dt.$$

The last integral converges if and only if

$$N(1 - \frac{1}{p}) - 2 < -1 \Leftrightarrow N(\frac{p-1}{p}) - 2 < -1 \Leftrightarrow p < N/(N-1).$$

This yields the following result:

Theorem 2.1. ([9])

- Assume that $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$, and $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $|x|f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ then there exists $\vec{F} \in (L^p(\mathbb{R}^N))^N$ such that

$$f = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx \delta_0 + \text{div} \vec{F}.$$

- If $\frac{N}{N-1} < p \leq \infty$, under the assumption that $|x|f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ there exists $\vec{F} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ such that

$$f = \operatorname{div}(\vec{F}).$$

Proof. We indicate the main steps of the proof in the first case. The second one is left as an exercise.

- **Case 1.** $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$. We set

$$F_j = - \int_0^1 x_j f \left(\frac{x}{t} \right) \frac{1}{t^{N+1}} dt.$$

Then,

$$\begin{aligned} \|F_j\|_p &\leq \int_0^1 \|x_j f \left(\frac{x}{t} \right)\|_p \frac{1}{t^{N+1}} dt = \int_0^1 t^{1+\frac{N}{p}} \|xf\|_p \frac{1}{t^{N+1}} dt \\ &= \|xf\|_p \int_0^1 t^{N(\frac{1}{p}-1)} dt \leq C(p, N) \|xf\|_p \end{aligned}$$

with $C(p, N) = \frac{p}{|N-(N-1)p|} < \infty \iff \frac{1}{p} - 1 > -\frac{1}{N} \iff p < \frac{N}{N-1}$.

The definition of the remainder term F_j can be motivated as follows:

$$\begin{aligned} \left\langle f - \int_{\mathbb{R}^N} f dx \delta_0, \varphi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \int_0^1 x \cdot \nabla_x \varphi(tx) dt dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \operatorname{div} \underbrace{\left[x \int_0^1 f \left(\frac{x}{t} \right) \frac{dx}{t^{N+1}} \right]}_F. \end{aligned}$$

■

Higher order generalizations can also be easily obtained. In particular, it follows that

$$f = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) x^\alpha dx D^\alpha \delta_0 + \sum_{|\alpha|=k+1} D^\alpha F_\alpha,$$

with F_α belonging to L^1 , under the assumption that $f \in L^1(1 + |x|^{k+1})$.

Applying this decomposition results one can get the asymptotic expansion of solutions as $t \rightarrow \infty$.

Consider the Cauchy problem

$$u_t - \Delta u = 0$$

with initial datum $\varphi = \varphi(x)$.

We have, $u = G * \varphi$ with, as indicated above, $G = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$. We know that

$$G * D^\alpha \delta_0 = D^\alpha [G * \delta_0] = D^\alpha G.$$

Applying then the decomposition formula

$$\varphi = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{|\alpha|!} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) x^\alpha dx D^\alpha \delta_0 + \sum_{|\alpha|=k+1} D^\alpha F_\alpha.$$

we obtain

$$u = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{|\alpha|!} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) x^\alpha dx D^\alpha G + \underbrace{\sum_{|\alpha|=k+1} F_\alpha * D^\alpha G}_R$$

with

$$\|R\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_p \| |x|^{k+1} \varphi \|_{L^1(\mathbb{R}^N)} t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p}) - \frac{|\alpha|}{2}}.$$

The later estimate is sharp.

The decomposition results we have proved on the basis of the Dirac delta and its derivatives are closely related with the Taylor power series expansion of the Fourier transform of the function to be developed. Indeed, the values of the Fourier transform and its derivatives at the origin can be easily computed

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ \widehat{f}(0) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx \\ D\widehat{f}(0) &= -2\pi i \int_{\mathbb{R}^N} x f(x) dx \\ &\dots \end{aligned}$$

Therefore, provided \widehat{f} is real analytic we have

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k \widehat{f}(0)}{k!} \xi^k.$$

We get

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k \widehat{f}(0)}{k!} \mathcal{F}^{-1}(\xi^k)$$

which, taking into account that $\widehat{\delta}_0 = 1$, i.e. $\delta_0 = \mathcal{F}^{-1}(1)$, and the resulting expressions for $\mathcal{F}^{-1}(\xi^k)$, yields the infinite order asymptotic expansion we have obtained rigorously at finite order in the previous results.

The decomposition formulas obtained above are also closely related with *Hardy inequalities*. Indeed, observe that, for instance, the decomposition formula

$$f = \int_{\mathbb{R}^N} f \, dx \delta_0 - \operatorname{div}(\vec{F})$$

(which holds, according to the previous results, when $f \in L^1$, $|x|f \in L^p$, $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$ with $\vec{F} \in (L^p)^N$) yields

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} |x|f(x) \frac{[\varphi(x) - \varphi(0)]}{|x|} dx \right| = \left| - \int_{\mathbb{R}^N} -\vec{F} \cdot \nabla \varphi \right| \leq \|\vec{F}\|_{L^p} \|\nabla \varphi\|_{L^{p'}} \leq C \| |x|f \|_{L^p} \|\nabla \varphi\|_{L^{p'}}$$

if and only if $1 \leq p < N/(N-1)$. By duality this yields the Hardy inequality,

$$\left\| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \leq C_{p'} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \quad N < p' \leq \infty.$$

The reverse is also true the extremal case $p = 1$ being excluded.

By the contrary, the decomposition formula

$$f = \operatorname{div}(\vec{F}), \quad p > N/(N-1)$$

yields

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} |x|f(x) \frac{\varphi(x)}{|x|} dx \right| = \left| - \int_{\mathbb{R}^N} \vec{F} \cdot \nabla \varphi \, dx \right| \leq \|\vec{F}\|_{L^p} \|\nabla \varphi\|_{L^{p'}} \leq c_p \| |x|f \|_{L^p} \|\nabla \varphi\|_{L^{p'}}$$

and, consequently,

$$\left\| \frac{\varphi(x)}{|x|} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \leq C_{p'} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

which holds, when

$$\frac{N}{N-1} < p \leq \infty \Leftrightarrow 1 \leq p' < N.$$

This establishes the connection between the decomposition formulas on the Dirac basis and Hardy inequalities. Note however that, as we mentioned before, it is better to use the explicit formulas obtained above, without using Hardy inequalities and duality, to avoid the problems related with the extremal cases $p = 1, \infty$.

The problem of obtaining sharp properties of the function f guaranteeing that the infinite order expansion

$$f = \sum_{|\alpha|} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) x^\alpha \, dx D^\alpha \delta_0$$

holds true is open.

2.4 Scaling: A basic tool for computing asymptotics.

We have shown that, using multipliers and integration by parts, one can get sharp $L^p(\mathbb{R}^N)$ -estimates and that this method applies as well for a number of nonlinear parabolic equations (see [[28]). However, obviously, in the nonlinear context, there is no explicit convolution formula for solutions allowing to obtain the asymptotic expansion. In this case scaling arguments are very useful although they give, in principle, only the first term of the expansion. Note also that, as pointed out in [29], the asymptotic behavior might be extremely complex.

Let us consider again the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \mathbb{R}^N \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

We know that

$$\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \|u(t)\|_p \leq C_p t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

We now use the scaling argument. For, we introduce the rescaled family

$$u_\lambda(x, t) = \lambda^N u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \lambda > 0.$$

It is easy to see that, for each $\lambda > 0$, u_λ solves the heat equation as well:

$$\begin{cases} u_{\lambda,t} - \Delta u_\lambda = 0 & \mathbb{R}^N, \quad 0 < t < 1 \\ u_\lambda(0) = \varphi_\lambda = \lambda^N \varphi(\lambda x). \end{cases}$$

At this point it is important to observe that the initial data of the rescaled family of solutions satisfy

$$\varphi_\lambda \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx \delta_0, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

On the other hand, the decay rate of the solution u in L^p yields uniform bounds on the rescaled family of solutions u_λ :

$$\|u_\lambda(t)\|_p \leq C_p t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})}, \quad 0 < t < 1.$$

This inequality holds uniformly on λ with a constant C_p independent of this parameter.

This estimate, together with the regularizing effect of the heat equation allows showing that, u_λ is relatively compact in $L^p(\mathbb{R}^N)$ for all $1 \leq p \leq \infty$, for each $t > 0$. In fact compactness holds in $C([\tau, 1]; L^p(\mathbb{R}^N))$, for all $0 < \tau < 1$. Let v be the limit of u_λ , after extraction of a suitable subsequence:

$$u_\lambda \rightarrow v, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

One can show that the limit v is the solution of

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, 1) \\ v(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx \delta_0. \end{cases}$$

By uniqueness of the fundamental solution $v = \int \varphi dx G$. Consequently the limit holds along the whole family $\lambda \rightarrow \infty$.

Then

$$u_\lambda|_{t=1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx G|_{t=1} \text{ in } L^p(\mathbb{R}^N),$$

for all $1 \leq p \leq \infty$. This turns to be equivalent to the fact that

$$\|u(t)\| - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx G|_{L^p(\mathbb{R}^N)} t^{\frac{N}{2}(1 - \frac{1}{p})} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

This is precisely the first term in the asymptotic expansion we got through the explicit representation formula of solutions.

Summarizing, we see that sharp L^p decay estimates, together with the regularizing effect of parabolic equations (to gain compactness), scaling arguments and the uniqueness of the limit characterized as the solution of the limit system, allow obtaining the first term of the asymptotic expansion of the solution as $t \rightarrow \infty$.

This method works for much more general problems (variable coefficients, nonlinearities, etc.) but fails to give a complete asymptotic expansion.

In fact, as we show by means of the explicit representation formula, when the initial datum φ satisfies the further property that $|x|\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, then we gain an extra decay rate of the order of $t^{-1/2}$. The scaling argument above in itself does not yield this extra information.

We have also mentioned above that this method allows exhibiting, in some particular cases a much more complex asymptotic behavior of solutions. We shall briefly discuss this matter in the following subsection.

2.5 How Universal is the Law of Asymptotic Simplification ?

Let us consider now the Cauchy problem for a linear parabolic equation with variable coefficients:

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) = 0 & \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(0) = \varphi, \end{cases}$$

where

$$0 < \alpha \leq a(x) \leq \beta \leq \infty \quad \text{a.e. } \in \mathbb{R}^N.$$

For this equation, the argument above, based on multiplying the equation by powers of the solution, and integration by parts, yields the same decay rate as for the constant coefficient heat equation. Namely, it follows that

$$\|u(t)\|_p \leq C_p t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})} \|\varphi\|_1.$$

Let us now perform the scaling argument. For, introduce the rescaled family of solutions:

$$u_\lambda = \lambda^N u(\lambda x, \lambda^2 t).$$

In this case they satisfy

$$\begin{cases} u_{\lambda,t} - \operatorname{div}(a(\lambda x) \nabla u_\lambda) = 0 \\ u_\lambda(0) = \varphi_\lambda = \lambda^N \varphi(\lambda x) \longrightarrow \int \varphi dx \delta_0. \end{cases}$$

Note that, in this case, due to the presence of the variable coefficient, the equation associated with u_λ depends on λ . In other words, the equation is not invariant under the scaling transformation. It is then important to analyze how does $a(\lambda x)$ behave as $\lambda \rightarrow \infty$. There are several cases to be distinguished:

- *Periodic case:* Assume that $a = a(x)$ is $[0, 1]^N$ -periodic i.e. it is periodic of period one in each of the N space variables. Then, $a_\lambda = a(\lambda x)$ is $[0, \frac{1}{\lambda}]^N$ -periodic and

$$a_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \bar{a} = \int_{[0,1]^N} a dy, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

weakly-* in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

But, contradicting the first intuition, in this case the limit v of the rescaled solutions u_λ does not satisfy the equation

$$v_t - \bar{a} \Delta v = 0.$$

Indeed, the theory of Homogenization guarantees that the limit function solves the *homogenized* equation

$$v_t - \operatorname{div}(A^* \nabla v) = 0,$$

where A^* is a constant coefficient symmetric and elliptic matrix that does not coincide with $\bar{a}I$ except in the trivial case where the coefficient $a = a(x)$ is constant.

For instance, in one space dimension ($N = 1$), the homogenized coefficient A^* is

$$A^* = \left(\int_0^1 \frac{1}{a} dy \right)^{-1}$$

which does indeed differ from the average \bar{a} of a except when a is constant.

This can be easily seen in the context of the elliptic equation

$$-(a(\lambda x)u'_\lambda)' = f.$$

Indeed, explicit computations yield

$$a(\lambda x)u'_\lambda = -\int_{-\infty}^x f$$

and

$$u'_\lambda = -\frac{1}{a(\lambda x)} \int f \longrightarrow -\int \frac{1}{a} \int_{-\infty}^x f.$$

Consequently,

$$u_\lambda \longrightarrow v \mathcal{D}'$$

where v solves

$$-a^*v'' = f$$

with

$$a^* = \left(\int \frac{1}{a} \right)^{-1}.$$

But although the analysis of this case is not straightforward, the periodic coefficient case is an easy one. In fact, using Block waves one can get a complete asymptotic expansions of solutions as $t \rightarrow \infty$ (see [10] and [22]).

- *Asymptotically Constant Diffusion:* Assume now that

$$a(x) = 1 + \epsilon(x), \quad \epsilon(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Then,

$$a(\lambda x) = 1 + \epsilon(\lambda x) \rightarrow 1, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^N.$$

In this case the limit v of the rescaled solutions u_λ does indeed satisfy

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 \\ v(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx \varphi_0, \end{cases}$$

and therefore

$$v = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx G.$$

We refer to [11] for a further analysis of this case.

So far, in all the examples, asymptotic simplification occurs and solutions behave as a gaussian process in a suitable homogeneous medium. But this is not true for all coefficients $0 < \alpha \leq a(x) \leq \beta < \infty$ since complexity arises as well. The following holds:

Lemma. ([29])

Given any sequence $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, bounded in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, we can construct a function $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ such that the weak- accumulation points of the rescaled family*

$$g_\lambda(x) = g(\lambda x) \quad \text{as } \lambda \rightarrow \infty$$

contain the closure of the sequence $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ on the weak- topology.*

In particular, for a suitable g , the set of accumulation points of the family $\{g_\lambda\}$ may cover a ball in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Proof. The Lemma can be easily proved by the “zooming method” that we describe briefly.

We first cut each function f_i in the annulus $2^{-j} < |x| < 2^j$ and then zoom it with a zooming factor $\lambda_{ij} > 0$. In this way we get the new function

$$f_{ij}(x) = f_i\left(\frac{x}{\lambda_{ij}}\right) \quad 2^{-j}\lambda_{ij} < |x| < 2^j\lambda_{ij}.$$

We arrange all these annulae so that they become disjoint by choosing appropriate values of λ_{ij} and then define the function g as being

$$g(x) = f_i\left(\frac{x}{\lambda_{ij}}\right) \quad \text{in each of the annulae.}$$

We then consider the rescaled family $g_\lambda = g(\lambda x)$. It is important to observe that, along the sequence $\lambda = \lambda_{ij}$, $g_\lambda \equiv f_i$. Therefore, the function f_i is included in the set of accumulation points of g_λ and this for all indexes i .

This concludes the proof of the Lemma. ■

This has important consequences in the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations with coefficients having the structure of the function g in the Lemma. Indeed, consider for instance the parabolic equation with variable density

$$\rho(x) u_t - \Delta u = 0.$$

The density ρ , according to the previous Lemma, can be chosen such that the set of accumulation points of the rescaled family ρ_λ contains any sequence $\{f_j\}$. The accumulation points of the rescaled family of solutions u_λ then solve the limiting equations

$$\begin{cases} f_j(x) v_t - \Delta v = 0 \\ v(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \delta_0, \end{cases}$$

for $j \geq 1$.

Consequently, the set of accumulation points of the rescaled family u_λ contains the whole family of fundamental solutions G_j of these equations, i.e.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} u_\lambda \supset \left\{ \int \varphi dx G_1, \int \varphi dx G_2, \int \varphi dx G_3 \dots \right\}.$$

This shows that, although for some important cases asymptotic simplification occurs, the large time asymptotic behavior may be quite complex in general. The problem of obtaining a complete asymptotic expansion to any order for general variable coefficient parabolic equations is still open. We refer to [29] for a deeper discussion of this issue.

3 The Wave Equation

3.1 The Dirichlet problem

Let us consider now the wave equation in a bounded domain Ω with Dirichlet boundary conditions:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \Omega \times (0, \infty) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

It is a model for the vibrations of strings and membranes and also for the propagation of acoustic waves.

This system is well-posed in the energy space $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Then, given $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ there exists a unique solution $u \in C([0, \infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega))$. Moreover, the energy

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u(x, t)|^2 + u_t^2(x, t)] dx$$

is conserved in time, i.e.

$$E(t) = E(0), \quad \forall t > 0.$$

This system exhibits the following features that are in opposition with those characterizing the heat equation:

- The system is purely conservative.
- The system lacks of smoothing properties.
- The system is time reversible.

The property of conservation of energy can be easily proved by the energy method. In this case, multiplying the equation by u_t and integrating by parts we get

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} u_{tt} u_t + \nabla u \cdot \nabla u_t dx = \int_{\Omega} (u_{tt} - \Delta u) u_t dx = 0.$$

Solutions of the wave equation can be easily developed in Fourier series. Consider again the eigenvalue problem

$$\begin{cases} -\Delta \phi_j(x) = \lambda_j \phi_j(x) & \Omega \\ \phi_j|_{\partial\Omega} = 0 & j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Then

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j \cos(\sqrt{\lambda_j} t) + \frac{b_j}{\sqrt{\lambda_j}} \sin(\sqrt{\lambda_j} t) \right) \phi_j(x),$$

where $\{a_j\}$ and $\{b_j\}$ are the Fourier coefficients of the initial data

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \phi_j(x), \quad u_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \phi_j(x).$$

In other words:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \phi_k(x)$$

where

$$\begin{cases} u_k'' + \lambda_k u_k = 0, & t > 0 \\ u_k(0) = a_k, u_k'(0) = b_k, & k = 1, \dots, \infty \end{cases}$$

Consequently, the wave equation is equivalent to a system of infinitely many uncoupled harmonic oscillators.

3.2 The Damped Wave Equation

The system above is purely conservative. But in most physical systems friction is present. Friction or damping is also a very efficient way for stabilizing engineering systems. This was already observed by L. Maxwell in his work “Governors” on the dynamical properties of the steam-engine in the end of XIX-th century.

The damped wave equation reads as follows

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + du_t = 0 & \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1 & \Omega \end{cases}$$

where $d > 0$ is the damping coefficients.

The energy method yields the following *energy dissipation law*

$$\frac{dE}{dt} = -d \int_{\Omega} u_t^2 \leq 0.$$

The following questions arise naturally: *Does $E(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$?* and, if yes, *How Fast ?*

In this case the Fourier method yields the following representation formula

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \phi_k(x)$$

where the coefficients u_k obey the ODE

$$u_k'' + \lambda_k u_k + d u_k' = 0.$$

The two roots of the characteristic polynomial are

$$r_k = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4\lambda_k}}{2}.$$

Accordingly, two cases have to be distinguished:

- $d \leq 2\sqrt{\lambda_1} \Rightarrow \operatorname{Re}(r_k^{\pm}) = -\frac{d}{2}, \quad \forall k$
- $d > 2\sqrt{\lambda_1} \Rightarrow \exists$ finite number of real eigenvalues.

But, always, independently of the value of the damping constant $d > 0$ it follows that:

$$\max_k \operatorname{Re}(r_k) \geq \max_k \operatorname{Re}(r_k) \Big|_{d=2\sqrt{\lambda_1}} = -\sqrt{\lambda_1}.$$

This means that, among the class of constant dampers, the one that produces the best decay rate for the energy is $d = 2\sqrt{\lambda_1}$ in which case the energy decays exponentially with a rate $-2\sqrt{\lambda_1}$.

In particular it is not true, as one could expect in a first approach, that increasing the damping constant necessarily yields a better decay rate. This occurs for $0 \leq d \leq d = 2\sqrt{\lambda_1}$ but it is not longer true for $d > 2\sqrt{\lambda_1}$. This phenomenon is referred to as “overdamping” in the engineering literature.

One can do much better by means of non-constant damping coefficients. But the corresponding spectral problem is not easy to deal with, since it is not self-adjoint.

3.3 Boundary damping

An interesting example is the one related with the wave equation with boundary damping which leads to a new phenomenon: the *vanishing waves*.

Consider the 1 – d wave equation

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ u_x(1, t) + u_t(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

The energy dissipation law now reads as follows:

$$\frac{dE}{dt}(t) = -u_t^2(1, t)$$

In this particular case not only solutions decay exponentially as $t \rightarrow \infty$. But, in fact, solutions vanish in finite time ($T = 2$). This is closely related with the fact that the spectrum of the system is empty and indicates that the evolution process under consideration is highly irreversible.

To prove this property of vanishing of waves it is convenient to decompose the d'Alembert operator in two first order transport equations:

$$u_{tt} - u_{xx} = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u = 0$$

A simple analysis[‡] of the behavior of solutions along characteristic lines allows showing that the vanishing of waves property is indeed true in time $T = 2$. Of course, at this level, the fact that in the dissipative boundary condition $u_x(1, t) + u_t(1, t) = 0$ one of these transport operators appears plays a key role.

But this example is impossible to reproduce for general equations or higher dimensional situations and it is very specific to the 1 – d wave equation with constant coefficients. In fact it does not even hold for the 1 – d wave equation with variable coefficients (see [7]).

The boundary conditions for which solutions vanish in final time are often referred to as transparent boundary conditions since, as the analysis of this 1 – d models shows, waves, when reaching the dissipative boundary condition are not reflected at all. Transparent boundary conditions are very useful in numerics since they allow reproducing in a bounded domain the properties of the Cauchy problem in the whole space. The fact of being able to reduce the problem to solving a system in a bounded domain, of course, reduces significantly the computational cost of the numerical method.

[‡]This is an interesting exercise. Note that in particular this leads to a strongly irreversible semigroup. Note also that imposing similar boundary conditions in both extremes of the space interval one can achieve the vanishing of waves in time $t = 1$.

3.4 Internal damping

There is an intermediate damping mechanism: the one in which the damping term is localized in a subdomain ω of the domain Ω where the equation holds:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + 1_\omega u_t = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1. \end{cases}$$

Here and in the sequel 1_ω denotes the characteristic function of the set ω .

In this case the energy dissipation law reads

$$\frac{dE}{dt} = - \int_\omega u_t^2 dx.$$

Theorem. *The energy decays exponentially provided ω is a neighborhood of a subset of the boundary of the form*

$$\Gamma(x_0) = \{x \in \partial\Omega : (x - x_0) \cdot n(x) > 0\},$$

for some $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

More precisely, there exist positive constants $C_{\Omega,\omega}$ and $\alpha_{\Omega,\omega}$, depending on Ω and ω such that

$$E(t) \leq C_{\Omega,\omega} e^{-\alpha_{\Omega,\omega} t} E(0),$$

for every solution of the system.

Remark.

- Here $n(x)$ denotes the unit normal vector to the domain Ω at the boundary point $x \in \partial\Omega$.
- The subset $\Gamma(x_0)$ of the boundary is constituted by the points in which the ray going from the reference point x_0 to x exits the domain Ω .
- In the context of the linear wave equation under consideration a sharp necessary condition for the exponential decay was given in [1] in Geometric Optics terms. This is the so called Geometric Control Condition and reads as follows: The exponential stability property holds if all rays of Geometric Optics, after possibly bouncing on the boundary of the domain Ω , reach the subdomain ω where the damping term is effective.
- Similar results hold for semilinear wave equations as well, see [8] and [34].

Sketch of the proof:

- Step 1: It suffices to check that there exist $C, T > 0$:

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_{\omega} u_t^2 dx dt,$$

for every solution.

This inequality, referred often as *observability inequality*, indicates that the dissipated energy is proportional to the energy within the system.

This observability inequality, combined with the energy dissipation law yields

$$E(T) - E(0) = - \int_0^T \int_{\omega} u_t^2 dx dy \leq -\frac{1}{C} E(0),$$

and consequently,

$$E(T) \leq \left(\frac{C-1}{C}\right) E(0).$$

Accordingly, the semigroup at time $t = T$, $S(T)$, is a contraction.

The semigroup property then yields the exponential decay. Indeed, when $t = kT$ it follows that

$$\|S(t)\| = \|S(kT)\| \leq \gamma^k = e^{k \log \gamma} = e^{-|\log \gamma| t/T}.$$

- Step 2: We now proceed to prove the observability inequality.

The difference between the damped and the conservative wave equation being the damping term itself, it suffices to prove the inequality for the conservative wave equation.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u_{\lambda} = 0 & \Omega \times (0, T) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1 & \Omega. \end{cases}$$

The question is now whether

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_{\omega} u_t^2 dx dt.$$

This inequality does indeed hold and can be proved using the so called multiplier method. It consists in multiplying the equation by u , u_t , $(x - x_0) \cdot \nabla u, \dots$ and integrating by parts to later combine the identities one obtains (see [18] and [20] for a systematic description of this method).

This method is very much the same as that developed by Pokhozhayev in the context of elliptic equations [§] and first introduced by F. Rellich [25]. Pokhozhayev's identity

[§]For further information on Pokhozhayev's identity see the web page <http://equinox.unr.edu/homepage/jm/utah03/>

allows getting connections between the total energy of solutions of elliptic problems and its energy concentrated on the boundary.

Let us recall how this identity may be established for the eigenvalue problem

$$-\Delta u = \lambda u \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

Multiplying the equation by $x \cdot \nabla u$ (we assume without loss of generality that $x_0 = 0$) we get

$$\lambda \int_{\Omega} u x \cdot \nabla u dx = -\frac{N\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx$$

and

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \Delta u x \cdot \nabla u dx &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (x \cdot \nabla u) dx - \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 (x \cdot n) d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 + x \cdot \nabla \frac{|\nabla u|^2}{2} \right] - \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 (x \cdot n) d\sigma \\ &= \left(1 - \frac{N}{2} \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 (x \cdot n) d\sigma. \end{aligned}$$

Moreover, multiplying the equation by u it follows that

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \lambda \int_{\Omega} u^2 = \lambda$$

provided we normalized the eigenfunctions by the condition $(\int_{\Omega} u^2 = 1)$. Combining these identities we get

$$\left(1 - \frac{N}{2} \right) \lambda - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 (x \cdot n) d\sigma = -\frac{N}{2} \lambda.$$

Thus

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot n) \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma(x_0)} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma.$$

Consequently, it follows that

$$\boxed{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma(x_0)} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma.}$$

It is important to note that this inequality holds independently of the frequency λ , and it does indeed guarantee that the energy of the eigenfunctions is uniformly bounded by the energy concentrated on the subset of the boundary $\Gamma(x_0)$.

As a consequence of this, with some extra work, taking into account that the subdomain ω is a neighborhood of Γ_{x_0} , it can also be proved that

$$\boxed{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{\omega} |\nabla u|^2 dx,}$$

with a constant C which is independent of the eigenfunction.

The same occurs for the wave equation when T is large enough, namely when $T > \text{diam}(\Omega \setminus \omega)$.

■

This Theorem shows that, when ω is a neighborhood of a large enough subset of the boundary, the exponential decay property holds. As a complement to this result it is important to observe that, in general, for any non-empty open subset ω of Ω the property of the exponential decay of the energy is no longer true but still the energy of every solution tends to zero without uniform decay rate. The fact that the energy of each solutions tends to zero can be proved as an application of La Salle's invariance principle.

3.5 Damping localized on narrow sets

We have discussed the case where the damping is localized in an open non-empty subset of the domain Ω . But the question makes also sense whatever ω is. It is for instance natural to analyze the case where ω is a measurable set of positive measure. In this case, a Lyapunov type argument allows showing that the energy of each individual trajectory tends to zero. The question of whether exponential decay holds under suitable additional assumptions is open in the context of damping sets of positive measure.

Applying La Salle's invariance argument and using the energy E of the system as Lyapunov function one can show that every solution tends to zero if and only the following uniqueness or unique continuation property holds: *The only solution of the damped equation*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + 1_\omega u_t = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

such that $u_t = 0$ in the damping region $\omega \times (0, \infty)$ is the trivial one $u \equiv 0$.

However, taking into account that the damping term vanishes under the condition that $u_t = 0$ in the damping region $\omega \times (0, \infty)$, it is in fact equivalent to proving the same unique continuation property for the undamped equation

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

The question is then whether $u_t = 0$ in $\omega \times (0, \infty)$ for the solutions of the conservative wave equation implies that $u \equiv 0$.

To analyze this question it is convenient to develop solutions in Fourier series. In fact we set $v = u_t$. Obviously, v is also a solution of the Dirichlet problem for the wave equation and $v = 0$ in $\omega \times (0, \infty)$. The Fourier representation formula yields

$$v(x, t) = \sum a_k^\pm e^{\pm i\sqrt{\lambda_k}t} \phi_k(x),$$

where the sum runs along the whole sequence of eigenpairs of the Laplace operator.

We now use the orthogonality property of complex exponentials in infinite time

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\lambda t} e^{-i\mu t} dt = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda = \mu \\ 0 & \text{if } \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

Then, the fact that $v = 0$ in $\omega \times (0, \infty)$ implies

$$\int_0^\infty \int_\omega v^2(x, t) dx dt \equiv 0$$

and the following alternative holds: Either $v \equiv 0$ or $\phi_k^2 = 0$ in ω for some k .

However, the second possibility can immediately be excluded since the eigenfunctions of the Laplacean are analytic and therefore they can not vanish in a set of positive measure without being trivially zero everywhere. Thus, we conclude that $u_t \equiv v \equiv 0$. Therefore, $u = u(x)$ and it solves the elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

The only solution of this elliptic equation being $u \equiv 0$, we deduce that the desired unique continuation property holds.

As a consequence of this analysis it follows that for damping sets ω of positive measure one can guarantee that all solutions tend to zero. The problem of getting conditions under which the decay rate is uniform and exponential is open, as we mentioned before.

Similar problems arise when the damper is localized in manifolds of lower dimension (see for instance [16] and [21]). One of the most classical examples is the case where the damper is localized in one single point x_0 of the domain.

Let us consider this problem in $1 - d$ the domain Ω under consideration being $\Omega = (0, \pi)$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t(x_0, t)\delta_{x_0} = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

In this case, the Fourier series development of solution reads

$$u = \sum a_k^\pm e^{\pm ikt} \sin(kx).$$

The damping being localized at the point $x_0 \in \Omega$ the question we analyze is closely related to how much of the energy of vibrations do we estimate through the observation of $\int_0^T u_t^2(x_0, t) dt$?

The answer is easy in this case. Indeed, by taking $T = 2\pi$ and using the orthogonality properties of trigonometric polynomials it follows that

$$\int_0^{2\pi} u_t^2(x_0, t) dt = \int_0^{2\pi} \left| \sum \pm a_k^\pm i k e^{\pm i k t} \sin(kx_0) \right|^2 dt = 2\pi \sum_k |a_k^\pm|^2 k^2 \sin^2(kx_0).$$

According to this we have to exclude the cases where x_0/π is rational or not. Indeed,

- $x_0/\pi \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists k: \sin(kx_0) = 0$.

In this case there are Fourier components that we do not see at all! Consequently, the observed quantity does not constitute a norm in the space of solutions. In what concerns the damped equation, this means that there are solutions that are not damped at all, whose energy remains constant in time.

• $x_0/\pi \in \mathbb{Q}^c \Rightarrow \gamma_k = \sin(kx_0) \neq 0$ for all k . In this case, for all $T \geq 2\pi$ we obtain the inequality

$$\sum_k \gamma_k^2 |a_k^\pm|^2 k^2 \leq C \int_0^T |u_t(x_0, t)|^2 dt.$$

However, the asymptotic behavior of the weights γ_k depends on the class of irrationality in which $\frac{x_0}{\pi}$ lies. In particular,

- When $\frac{x_0}{\pi}$ is an algebraic number of degree 2,

$$|\gamma_k| \sim c/|k|$$

- By the contrary, if $\frac{x_0}{\pi}$ is a Liouville number

$$|\gamma_k| \rightarrow 0, \quad \text{exponentially as } k \rightarrow 0.$$

According to this, in the best case, for an optimal choice of x_0 , i.e. when x_0/π is an algebraic number of degree 2, we loose one derivative on the observability inequality in the sense that we get

$$\|(u_0, u_1)\|_{L^2(0, \pi) \times H^{-1}(0, \pi)}^2 \leq C \int_0^{2\pi} u_t^2(x_0, t) dt,$$

instead of the sharp inequality

$$E(0) \leq C \int_0^{2\pi} u_t^2(x_0, t) dt,$$

one could expect by comparison with the case where the damping is effective in an open subset of the domain. The latter is never true, whatever the choice of x_0 is.

This weakened observability estimates lead to polynomial decay rates for smooth solutions of the damped wave equation (see [16]). In $1 - d$ these results were explained in terms of ray properties in [21]. There it was shown that one could concentrate solutions

of the wave equation along rays, cancelling each other, so that the observability inequality above with a defect of one derivative becomes sharp.

In $1 - d$ wave equations with variable coefficients behave very much the same as the constant coefficient one discussed above. However, in that case, one can not rely on the property of orthogonality of trigonometric polynomials. The classical *Ingham inequality* plays the same role at this level (see [33]).

The problem of combining Geometric Optics tools with others like diophantine approximations or ergodicity theory to obtain polynomial decay rates when the damping acts on narrow sets in several space dimensions is completely open.

The same can be said about the case where the damper is located in moving points. We refer to [3] for the analysis of the approximate control property for the heat equation. But nothing is known for in the context of stabilization of the wave equation.

4 Convergencia al equilibrio

4.1 Presentación

Hemos visto que al discretizar las ecuaciones de evolución tipo Navier-Stokes y Burgers en tiempo, en cada paso de la iteración temporal, nos encontramos con una ecuación elíptica no-lineal a resolver. Lo mismo ocurre cuando abordamos la resolución de la ecuación de evolución mediante la teoría de semi-grupos no-lineales, como veremos más adelante.

Pero los problemas elípticos subyacentes tiene importancia más allá de estas consideraciones al nivel de la modelización. En efecto, son muchos los casos en los que, con el objeto de simplificar el modelo en consideración, se sustituye la ecuación de evolución por una ecuación estacionaria, de modo que, en el ámbito de las ecuaciones analizadas en este curso, esto supone pasar de una ecuación parabólica a una elíptica.

Esto supone una simplificación muy importante también desde el punto de vista numérico pues desaparece la variable temporal.

Hay una razón para que esta reducción se pueda hacer en algunas ecuaciones: las soluciones, a medida que $t \rightarrow +\infty$, sufren una simplificación asintótica que hace que se parezcan cada vez más a la (o una) solución estacionaria. En esta sección vamos a analizar algunos casos sencillos en los que este hecho puede probarse de manera rigurosa. Obviamente, en la práctica, esta posibilidad de simplificar el modelo para considerarlo estacionario, se utiliza incluso en casos en cuya validez es dudosa. Esto, evidentemente, puede ser una causa para invalidar los resultados obtenidos. Es precisamente por esta razón que es importante conocer las técnicas básicas que permiten justificar esta simplificación al nivel de la modelización.

4.2 Sistema gradiente en dimensión finita

Consideramos en primer lugar un sistema gradiente en dimensión finita

$$\begin{cases} x'(t) + \nabla H(x(t)) = 0, & t > 0 \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

donde

$$H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \quad (2)$$

es una función de clase C^2 , convexa y que alcanza su valor mínimo en un único punto $x^* \in \mathbb{R}^N$:

$$H(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^N} H(x). \quad (3)$$

Obviamente, se tiene,

$$\nabla H(x^*) = 0, \quad (4)$$

por lo que x^* es una solución estacionaria de (1). En realidad, x^* es la única solución estacionaria de (1) puesto que serlo es equivalente a ser un punto crítico de H y sólo existe uno: el mínimo global x^* .

Multiplicando en (1) por $x'(t)$ obtenemos que

$$|x'(t)|^2 + \langle \nabla H(x(t)), x'(t) \rangle = 0. \quad (5)$$

Aquí y en lo sucesivo, $|\cdot|$ denota la norma euclídea en \mathbb{R}^N y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar asociado.

Por otra parte,

$$\langle \nabla H(x(t)), x'(t) \rangle = \frac{d}{dt} H(x(t)).$$

Deducimos por tanto la identidad,

$$\frac{d}{dt} H(x(t)) = -|x'(t)|^2, \quad (6)$$

de donde se obtiene que

$$H(x(t)) + \int_0^t |x'(s)|^2 ds = H(x_0). \quad (7)$$

En particular,

$$H(x(t)) \leq H(x_0). \quad (8)$$

Suponiendo que H es coerciva, i.e.

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} H(x) = \infty, \quad (9)$$

lo cual es una hipótesis natural a la hora de minimizar el funcional H , obtenemos que la trayectoria $t \rightarrow x(t)$ está acotada.

Definimos ahora el conjunto ω -límite:

$$\omega(x_0) = \{y_0 \in \mathbb{R}^N : \exists t_j \rightarrow \infty, x(t_j) \rightarrow y_0\} \quad (10)$$

que es no vacío.

Del principio de invarianza de La Salle[¶], en vista de la ley de disipación (6) es fácil comprobar que $y(t)$ solución de (1) con dato inicial y_0 , es tal que $\nabla H(y_0) = 0$. Por la unicidad del punto crítico de H deducimos que $y_0 = x^*$. Esto demuestra que

$$\omega(x_0) = \{x^*\} \quad (11)$$

y, por tanto, que

$$x(t) \rightarrow x^*, t \rightarrow \infty. \quad (12)$$

El resultado que acabamos de demostrar muestra que, bajo condiciones bastante generales sobre el potencial H , todas las soluciones de (1) convergen a la única solución de equilibrio x^* . Esto permite justificar la sustitución del modelo de evolución (1) por el estacionario (4). Pero ésto ha de hacerse con prudencia puesto que la demostración de convergencia que hemos realizado no proporciona ninguna estimación sobre la velocidad con la que esto se produce.

Bajo hipótesis adicionales sobre el potencial H , se puede además estimar la velocidad de convergencia. Dada la solución $x = x(t)$ de (1) y la solución estacionaria x^* de (4), consideramos la diferencia

$$y(t) = x(t) - x^*.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} y'(t) &= -\left[\nabla H(x(t)) - \nabla H(x^*)\right] \\ &= -\left[\nabla H(y(t) + x^*) - \nabla H(x^*)\right]. \end{aligned}$$

Multiplicando escalarmente por $y(t)$ en esta ecuación deducimos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |y(t)|^2 = -\left[\langle \nabla H(y(t) + x^*) - \nabla H(x^*), y(t) \rangle\right].$$

Si H es de clase C^2 , utilizando el desarrollo de Taylor, deducimos que

$$\langle \nabla H(y(t) + x^*) - \nabla H(x^*), y(t) \rangle = \langle D^2 H(\xi(t)) y(t), y(t) \rangle,$$

[¶] $H(x(t))$ está acotada inferiormente y es decreciente. Tiene por tanto un límite $\lim_{t \rightarrow \infty} H(x(t)) = L$. Por otra parte, como $x(t_j) \rightarrow y_0$, por la propiedad de semigrupo, $x(t_j + t) \rightarrow y(t)$. Como $H(x(t_j + t)) \rightarrow L$, $j \rightarrow \infty$ para todo $t > 0$, deducimos que $H(y(t)) = L$, para todo $t > 0$. Aplicando la identidad de energía (6) deducimos que $y'(t) = 0$ lo cual equivale a $y(t) \equiv y_0$. Como la única solución estacionaria es x^* , deducimos que $y_0 = x^*$.

donde D^2H denota la matriz Hessiana de H .

Suponiendo que H es estrictamente uniformemente convexa, deducimos la existencia de $\alpha > 0$ tal que

$$D^2H(\xi) \geq \alpha I, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (13)$$

de modo que

$$\langle \nabla H(y(t) + x^*) - \nabla H(x^*), y(t) \rangle \geq \alpha |y(t)|^2,$$

es decir,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |y(t)|^2 \leq -\alpha |y(t)|^2, \quad (14)$$

de donde se deduce la convergencia exponencial

$$|y(t)| \leq e^{-\alpha t} |y_0| = e^{-\alpha t} |x_0 - x^*|. \quad (15)$$

4.3 La ecuación del calor lineal

Consideramos ahora la ecuación del calor lineal

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x) & \text{en } \Omega, t > 0 \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (16)$$

en un dominio acotado y regular Ω de \mathbb{R}^N y $f = f(x)$ es una fuente externa independiente de t .

Mediante los métodos habituales (Galerkin, semigrupos,...) es fácil comprobar que si $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $f \in H^{-1}(\Omega)$, existe una única solución de (16) en la clase $u \in C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}(0, \infty; H_0^1(\Omega))$.

Por otra parte, la identidad de energía proporciona

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} f u dx \quad (17)$$

de donde se deduce que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Tomando por ejemplo $\varepsilon = 1$ se deduce que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \quad (18)$$

Aplicando la desigualdad de Poincaré, que garantiza la existencia de $c(\Omega) > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx \geq c(\Omega) \int_{\Omega} \varphi^2 dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad (19)$$

deducimos la desigualdad de energía

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx + c(\Omega) \int_{\Omega} u^2 dx \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2, \quad (20)$$

cuya resolución explícita da lugar a la cota

$$\int_{\Omega} u^2(x, t) dx \leq e^{-c(\Omega)t} \int_{\Omega} u_0^2(x) dx + \frac{(1 - e^{-c(\Omega)t})}{c(\Omega)} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \quad (21)$$

Deducimos así que

$$u \in L^{\infty}(0, \infty; L^2(\Omega)), \quad (22)$$

o, lo que es lo mismo, que la trayectoria $\{u(t)\}_{t \geq 0}$ está acotada en $L^2(\Omega)$.

Una vez que sabemos que la trayectoria está acotada, cabe plantearse la cuestión de su comportamiento asintótico cuando $t \rightarrow \infty$. En caso de que el límite de $u(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ existe, es previsible que ésta sea una solución estacionaria, independiente de t , de la ecuación que satisfará entonces la ecuación elíptica

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (23)$$

La teoría variacional clásica garantiza la existencia y unicidad de la solución $u^* \in H_0^1(\Omega)$ de (23).

Veamos ahora que

$$u(t) \rightarrow u^*, \text{ exponencialmente en } L^2(\Omega), t \rightarrow \infty. \quad (24)$$

En efecto, definimos

$$v(t) = u(t) - u^* \quad (25)$$

que es la solución de la ecuación del calor homogénea

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{en } \Omega, t > 0 \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega, t > 0 \\ v(x, 0) = v_0(x) = u_0(x) - u^*(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (26)$$

La identidad de energía asegura en este caso que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = 0. \quad (27)$$

Aplicando la desigualdad de Poincaré, como en el argumento anterior, deducimos que

$$\|v(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-c(\Omega)t} \|u_0 - u^*\|_{L^2(\Omega)}, \quad (28)$$

lo cual proporciona la velocidad exponencial de convergencia anunciada.

De hecho (28) proporciona una tasa de decaimiento exponencial explícita, del orden de la constante de Poincaré $c(\Omega)$.

El método de la energía que acabamos de presentar permite obtener tasas de convergencia al equilibrio para una amplia clase de ecuaciones parabólicas lineales y no-lineales y también incluso, para ecuaciones de ondas disipativas. De este modo puede por ejemplo abordarse el caso de la ecuación parabólica p -Laplaciana:

$$u_t - (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0. \quad (29)$$

Conviene sin embargo tener en cuenta que no siempre se obtiene decaimiento exponencial, pudiendo ser este polinomial.

Por ejemplo, en el caso de la ecuación (29) con condiciones de contorno de Dirichlet, por el método de la energía deducimos la identidad

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx = 0.$$

La desigualdad de Poincaré en este caso garantiza la existencia de una constante $c_p(\Omega) > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \geq c_p(\Omega) \int_{\Omega} |u|^p dx,$$

de donde obtenemos la estimación

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx + c_p(\Omega) \int_{\Omega} |u|^p dx \leq 0.$$

Suponiendo que $p > 2$ y aplicando la desigualdad de Hölder deducimos que

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{2/p} |\Omega|^{(p-2)/p}.$$

De estas dos desigualdades deducimos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{2c_p(\Omega)}{|\Omega|^{(p-2)/2}} \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{p/2} \leq 0.$$

Resolviendo esta desigualdad deducimos que

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq \left[\frac{(p-2)}{2} \left(\frac{2c_p(\Omega)}{|\Omega|^{(p-2)/2}} t + \frac{2 \int_{\Omega} u_0^2 dx}{(p-2)} \right)^{(2-p)/2} \right]^{2/(p-2)} \leq c_p(\Omega) t^{-2/(p-2)},$$

es decir, un decaimiento polinomial con un exponente $2/(p-2)$. A medida que $p \nearrow \infty$ esta tasa de convergencia se debilita, lo cual refleja la creciente debilidad del efecto disipativo

del p -Laplaciano. Esto es natural puesto que, en la medida que, $u \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, al aumentar p la difusividad del p -Laplaciano disminuye. Sin embargo, a medida que $p \searrow 2$, la tasa de decaimiento polinomial $2/(p-2)$ tiende a infinito, lo cual refleja el hecho de que para el caso de la ecuación lineal ($p = 2$), se tenga una tasa de decaimiento exponencial.

Pero volvamos a la ecuación lineal (16). En (28) hemos obtenido una tasa de decaimiento exponencial con constante $C(\Omega)$, la constante de Poincaré. Con el objeto de analizar con más cuidado el comportamiento exponencial de las soluciones es conveniente utilizar desarrollos en serie de Fourier. Para ello consideramos una base ortogonal de $L^2(\Omega)$, $\{\varphi_j\}_{j \geq 1}$, constituida por autofunciones del Laplaciano:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_j = \lambda_j\varphi_j & \text{en } \Omega \\ \varphi_j = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

y asociada a la correspondiente sucesión de autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N \leq \dots \rightarrow \infty.$$

Desarrollamos en serie de Fourier los datos u_0 y f de (16).

Tenemos así

$$f = \sum_{j \geq 1} f_j \varphi_j; \quad u_0 = \sum_{j \geq 1} u_{0,j} \varphi_j, \quad (30)$$

mientras que la solución habrá de ser de la forma

$$u(x, t) = \sum_{j \geq 1} u_j(t) \varphi_j. \quad (31)$$

La búsqueda de la solución se reduce a la determinación de sus coeficientes de Fourier. Estos vienen caracterizados por las ecuaciones

$$\begin{cases} u_j' + \lambda_j u_j = f_j, & t > 0 \\ u_j(0) = u_{0,j}, & j \geq 1 \end{cases} \quad (32)$$

que pueden calcularse explícitamente:

$$u_j(t) = u_{0,j} e^{-\lambda_j t} + \frac{(1 - e^{-\lambda_j t})}{\lambda_j} f_j, \quad j \geq 1. \quad (33)$$

De esta expresión se deduce inmediatamente que

$$u_j(t) \rightarrow \frac{f_j}{\lambda_j}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \forall j \geq 1. \quad (34)$$

Un análisis un poco más cuidadoso permite comprobar que

$$u(\cdot, t) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} \sum_{j \geq 1} \frac{f_j}{\lambda_j} \varphi_j(x), \quad \text{en } L^2(\Omega). \quad (35)$$

Esto coincide con el resultado obtenido mediante el método de la energía puesto que

$$\sum_{j \geq 1} \frac{f_j}{\lambda_j} \varphi_j(x), \quad (36)$$

es precisamente el desarrollo en serie de Fourier de la solución estacionaria u^* de (23).

De hecho este análisis confirma que

$$\|u(t) - u^*\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_1 t} \|u_0 - u^*\|_{L^2(\Omega)}, \quad (37)$$

siendo $\lambda_1 > 0$ el primer autovalor del operador $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$.

En realidad esta estimación coincide con la obtenida en (28) puesto que la constante de Poincaré $c(\Omega)$ coincide con λ_1 , i.e.

$$c(\Omega) = \lambda_1.$$

Esto es así puesto que, por el principio mini-max, el primer autovalor λ_1 se caracteriza como el mínimo del cociente de Rayleigh,

$$\lambda_1 = \min_{\psi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx}{\int_{\Omega} \psi^2 dx}.$$

De modo que λ_1 , el primer autovalor, es la mayor constante de la desigualdad

$$\lambda_1 \int_{\Omega} \psi^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

En esta sección hemos probado que las soluciones de la ecuación del calor convergen a una solución estacionaria, cuando la fuente externa f es independiente del tiempo. El mismo tipo de argumentos permiten probar, por ejemplo, que si $f = f(x, t)$ depende de manera periódica (de período $\tau > 0$) en el tiempo t , entonces existe una única solución τ -periódica $u^* = u^*(x, t)$ de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \Omega, 0 < t < \tau \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, 0 < t < \tau \\ u(0) = u(\tau) \end{cases}$$

de modo que, para cualquier solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \Omega, t > 0 \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

se cumple que

$$\|u(t) - u^*(t)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

con velocidad exponencial. Dejamos los detalles de esta prueba al lector interesado.

En esta sección y en la anterior hemos mostrado algunos ejemplos en los que las soluciones de la ecuación de evolución, cuando $t \rightarrow \infty$, se simplifican asintóticamente al converger a un estado estacionario. Esto permite en algunos casos sustituir el modelo de evolución por el estacionario pero no sin el riesgo que supone haber realizado a priori un estudio cuantitativo de la distancia de ambas soluciones (evolución / estacionaria) o, lo que es lo mismo, de la velocidad de convergencia cuando $t \rightarrow \infty$.

En la práctica son muchos los casos en los que se adopta un modelo estacionario sin disponer de una prueba rigurosa de la convergencia asintótica de las soluciones de la ecuación de evolución cuando $t \rightarrow \infty$. Esto es una constante en el ámbito del análisis numérico y computacional en el que, con frecuencia, nos vemos obligados a emplear métodos sin poseer prueba rigurosa de convergencia más que en algunos casos simplificados.

4.4 Sistemas gradiente y métodos de descenso

En la sección 4.2 hemos probado que por sistemas gradiente de la forma

$$\begin{cases} x' + \nabla H(x) = 0, & t > 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (38)$$

bajo condiciones adecuadas de convexidad y de coercividad del potencial H , las soluciones de (38) convergen, cuando $t \rightarrow \infty$, a la solución estacionaria x^* :

$$\nabla H(x^*) = 0. \quad (39)$$

Podemos interpretar este resultado, como lo hemos hecho hasta ahora, como el de la simplificación asintótica que nos permite pasar de (38) a (39).

Pero puede ser interpretado también de manera distinta. En efecto, bajo las hipótesis de convexidad y coercividad impuestas sobre el funcional H , este posee un único punto crítico x^* , que es el mínimo global, solución de (39). El hecho de que las soluciones de (38) converjan, cuando $t \rightarrow \infty$, a este punto crítico nos permiten interpretar la ecuación de evolución (38) como una manera de aproximar el mínimo del funcional. La ecuación (38) puede por tanto entenderse como un algoritmo continuo en t para la aproximación del mínimo del funcional H .

De hecho, se trata de un algoritmo de descenso en la medida que, tal y como probábamos en (6), se verifica la identidad de energía

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = - |x'(t)|^2, \quad (40)$$

que demuestra que $H(x(t))$ decrece a medida que t aumenta. La ecuación diferencial (38) constituye por tanto un mecanismo continuo de minimización del funcional H que

conduce la trayectoria desde el punto inicial x_0 de energía y nivel $H(x_0)$ hasta el punto de mínimo x^* de energía $H(x^*)$, de manera monótona.

El mismo tipo de algoritmo puede reproducirse de manera discreta en tiempo. Para hacerlo, introducimos una discretización en tiempo de la ecuación (38) de paso Δt ,

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\Delta t} = -\nabla H(x^{k+1}) \quad (41)$$

que puede también escribirse como

$$x^{k+1} + \Delta t \nabla H(x^{k+1}) = x^k, \quad (42)$$

o, de otro modo, como

$$x^{k+1} = (I + \Delta t \nabla H)^{-1}(x^k). \quad (43)$$

La aplicación $h = (I + \Delta t \nabla H)^{-1}$ está bien definida. En efecto, para resolver

$$h(x) = y \Leftrightarrow x + \Delta t \nabla H(x) = y \quad (44)$$

basta con minimizar el funcional

$$J(x) = \frac{1}{2} |x|^2 + \Delta t H(x) - y \cdot x \quad (45)$$

en \mathbb{R}^N . Este funcional posee en efecto un único mínimo $x \in \mathbb{R}^N$ para cada $y \in \mathbb{R}^N$ puesto que es continuo, convexo y coercivo.

Este punto de mínimo es precisamente la única solución de (44) por ser J también estrictamente convexo.

La iteración discreta (41) es por tanto la misma, escrita en la forma (43) que se utilizaría en la búsqueda de un punto fijo de la aplicación $J = (I + \Delta t \nabla H)^{-1}$ si esta fuese contractiva. Veamos que en realidad lo es.

Consideramos dos puntos $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^N$ y las correspondientes soluciones $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$:

$$x_j + \Delta t \nabla H(x_j) = y_j, \quad j = 1, 2.$$

Resultando las ecuaciones para $j = 1, 2$ obtenemos

$$x_1 - x_2 = \Delta t (\nabla H(x_1) - \nabla H(x_2)) = y_1 - y_2.$$

Multiplicando esta identidad por $x_1 - x_2$ (haciendo el producto escalar en \mathbb{R}^N) obtenemos que

$$|x_1 - x_2|^2 + \Delta t \langle \nabla H(x_1) - \nabla H(x_2), x_1 - x_2 \rangle = \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \leq |y_1 - y_2| |x_1 - x_2|.$$

Ahora bien, si H es uniforme y estrictamente convexa, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\langle \nabla H(x_1) - \nabla H(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq \alpha |x_1 - x_2|^2,$$

de donde deducimos que

$$(1 + \alpha\Delta t) \|x_1 - x_2\|^2 \leq \|y_1 - y_2\| \|x_1 - x_2\|.$$

Es decir,

$$\|x_1 - x_2\| \leq k \|y_1 - y_2\|$$

con

$$k = \frac{1}{1 + \alpha\Delta t} < 1.$$

Vemos pues que $J = (I + \Delta t \nabla H)^{-1}$ es estrictamente contractiva. La iteración (41) construida discretizando en tiempo el sistema dinámico gradiente, por lo tanto, converge y converge al punto fijo de J que satisface

$$x + \nabla t \nabla H(x) = x.$$

Se trata evidentemente de una ecuación equivalente a

$$\nabla H(x) = 0$$

cuya única solución es el mínimo absoluto x^* de H .

Hemos comprobado por tanto que el sistema dinámico discreto (41) proporciona también un algoritmo iterativo de aproximación del mínimo del funcional H .

4.5 Mínimos cuadrados

Hemos visto que muchos de los problemas que se plantean en el contexto de la Mecánica de Fluidos admiten una formulación variacional. Esto permite, desde un punto de vista teórico, resolverlos mediante el Método Directo del Cálculo de Variaciones y, desde un punto de vista computacional, hacerlo mediante un método iterativo de descenso como el Método del Gradiente Conjugado.

Pero hay otros muchos problemas que no pueden ser abordados de este modo, ya sea porque no admiten una formulación variacional o bien porque el funcional involucrado no es convexo.

En el caso por ejemplo de los sistemas lineales

$$Ax = b, \tag{46}$$

en los que, si A no es simétrica, $Ax - b$ no es el gradiente de un funcional $J : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

Por otra parte, el contexto de las ecuaciones de reacción-difusión de la teoría de la combustión surgen ecuaciones elípticas con no-linealidad exponencial de la forma

$$\begin{cases} -\Delta u = e^u + f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

En este caso, las soluciones son puntos críticos del funcional

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} e^u dx - \int_{\Omega} f u dx,$$

que está bien definido si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Pero al no ser convexo, los métodos de descenso habituales no garantizan la convergencia a un punto crítico.

En estos casos los métodos inspirados en los mínimos cuadrados pueden ser de gran utilidad.

Para ilustrar este tipo de métodos consideramos en primer lugar un sistema de N ecuaciones no-lineales en \mathbb{R}^N :

$$f_i(x_1, \dots, x_N) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (47)$$

que escribimos en forma vectorial como

$$f(x) = 0. \quad (48)$$

Sea Σ una matriz $N \times N$ simétrica y definida positiva y consideremos la función

$$j(y) = \frac{1}{2} \langle \Sigma f(y), f(y) \rangle \quad (49)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar en \mathbb{R}^N .

La solución mínimos cuadrados asociada a la matriz M es aquella que resuelve el siguiente problema de minimización:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^N \\ j(x) \leq j(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (50)$$

Para ilustrar el significado de esta reducción consideramos la ecuación lineal en la que

$$f(y) = Ay - b. \quad (51)$$

La ecuación original a resolver es entonces

$$Ax = b, \quad (52)$$

que tiene una solución sí y sólo sí

$$b \in R(A) = \{q : q = Ay, y \in \mathbb{R}^N\}. \quad (53)$$

Tomamos, para simplificar los cálculos $\Sigma = I$. En este caso las soluciones obtenidas para mínimos cuadrados son las correspondientes a la *forma normal*

$$A^t Ax = A^t b. \quad (54)$$

Lo sorprendente de este hecho es que la matriz $A^t A$ involucrada en la ecuación normal es simétrica y semi-definida positiva. Además, este nuevo sistema tiene siempre al menos una solución puesto que $b \in R(A^t) = R(A^t A)$.

Cuando $\ker(A^t A) = 0$ (i.e. $(A) = N$) el sistema (54) admite una única solución. Sin embargo, cuando $(A) < N$, el sistema admite una infinidad de soluciones de la forma

$$x = \hat{x} + z, \hat{x} \in R(A^t), z \in \ker A. \quad (55)$$

De las soluciones

$$\mathbb{R}^N = R(A^t) \oplus \ker(A); (R(A^t))^\perp = \ker(A), \quad (56)$$

deducimos la relación

$$\|x\|^2 = \|\hat{x}\|^2 + \|z\|^2 \geq \|\hat{x}\|^2. \quad (57)$$

Vemos pues que \hat{x} es la única solución de norma mínima de (54) son los puntos críticos del funcional

$$J(x) = \frac{1}{2} \|A^t x\|^2 - A^t b \cdot x, \quad (58)$$

que es convexo. El método de mínimos cuadrados juega pues el papel de convexificador del sistema (52).

Consideramos ahora el caso en que f no es afín. Suponemos que $f \in C^2$. Sea x una solución (48), entonces

$$\begin{cases} j'(x) = f'(x)^t \Sigma f(x) = 0 \\ j''(x) = f'(x)^t \Sigma f'(x). \end{cases} \quad (59)$$

La matriz $j''(x)$ es semi-definida positiva y, cuando $f(x)$ es regular (i.e. $\det(f'(x)) \neq 0$), es definida positiva. De este modo observamos que $j''(\cdot)$ es definida positiva en un entorno de x y por tanto j es estrictamente convexa. Vemos por tanto que el método de mínimos cuadrados tiene propiedades de convexificación locales.

El papel de la matriz Σ elegida para aplicar el método de mínimos cuadrados es múltiple. Por ejemplo, permite privilegiar algunas de las ecuaciones $f_i(x) = 0$ frente a otras. La matriz Σ puede también contribuir a reducir el número de condición de $j'(y)$, lo cual hace el problema de los mínimos cuadrados (50) más robusto.

En el marco lineal, la ecuación correspondiente a cada matriz Σ es de la forma

$$A^t \Sigma A x = A^t \Sigma b. \quad (60)$$

Se trata de la ecuación normal generalizada. Este sistema tiene siempre una solución que puede ser única o no en función de que $\ker(A)$ se reduzca o no al $\{0\}$.

Cuando las dimensiones del sistema no son excesivas el sistema (60) puede resolver mediante un método directo (Cholesky, por ejemplo). Cuando $R(A^t) < N$ conviene introducir una regularización del sistema de la forma

$$(\varepsilon S + A^t \Sigma A) x_\varepsilon = A^t \Sigma b, \quad (61)$$

siendo $\varepsilon > 0$ y S una matriz simétrica y definida positiva ($S = I$, por ejemplo). Se tiene entonces que

$$x_\varepsilon - \hat{x}_s = O(\varepsilon), \quad (62)$$

donde \hat{x}_s es la única solución de (60) en $R(S^{-1}A^t)$. Por otra parte, la ecuación (61) puede resolverse mediante el método de gradiente conjugado.

5 The Burgers equation

5.1 Presentation

La ecuación de Burgers viscosa es la siguiente

$$u_t - \nu u_{xx} + (u^2)_x = 0. \quad (63)$$

En (63) $\nu > 0$ es el parámetro de viscosidad.

En el caso $\nu = 0$ la ecuación (63) se convierte en la siguiente ecuación hiperbólica no-lineal de orden uno:

$$u_t + (u^2)_x = 0. \quad (64)$$

Se trata en ambos casos del análogo 1 - d de las ecuaciones de Navier-Stokes y de Euler para el movimiento de los fluidos.

Las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible y homogéneo pueden escribirse como

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u = \nabla p \\ u = 0. \end{cases} \quad (65)$$

En (65) $u = u(x, t)$ es el vector velocidad del fluido que puede por tanto tener tres componentes o sólo dos en casos simplificados de fluidos bidimensionales. El parámetro $\nu > 0$ es el de viscosidad del fluido. La función $p = p(x, t)$ es escalar y denota la presión.

La primera ecuación de (65) es en realidad un sistema de tres (resp. dos en dimensión dos) ecuaciones en derivadas parciales con tres (resp. dos) incógnitas. La segunda ecuación es la que refleja la incompresibilidad del fluido.

En el caso de ausencia de viscosidad, i.e. cuando $\nu = 0$, obtenemos las ecuaciones de Euler para un fluido perfecto o ideal:

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u = \nabla p \\ u = 0. \end{cases} \quad (66)$$

Se trata efectivamente de una idealización puesto que todo fluido tiene un cierto grado de viscosidad. Pero (66) es un modelo útil para describir el movimiento de fluidos poco viscosos.

Las ecuaciones (63) y (64) son modelos reducidos de las ecuaciones de Navier-Stokes (65) y de Euler (66) respectivamente.

La ecuación (63), también denominada ecuación del calor no-lineal, es la más sencilla en la que se combinan los efectos de la viscosidad y de la convección no-lineal cuadrática. Esta ecuación, mediante un cambio de variables introducido independientemente por Hopf y Cole en los años 50, puede reducirse a la ecuación del calor lineal y, por tanto, ser resuelta explícitamente. En la siguiente sección describiremos este cambio de variables. La solución así obtenida refleja adecuadamente la presencia de los dos términos y efectos principales presentes en (63): la viscosidad y la convección no-lineal. La viscosidad hace que la solución tenga una escala Gaussiana, mientras que la convección no-lineal hace que la solución desarrolle una asimetría, producto de un fenómeno de transporte a una velocidad no homogénea.

Las soluciones de (64) son el límite cuando $\nu \rightarrow 0$ de las de (63). En ellas el efecto de la viscosidad desaparece y eso hace que las soluciones puedan dejar de ser regulares en tiempo finito desarrollando choques.

5.2 La transformación de Hopf-Cole

Con el objeto de introducir esta transformación consideraremos soluciones $u = u(x, t)$ de (63) tales que $|u(x, t)| + |u_x(x, t)| \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$.

Si $u = u(x, t)$ es una solución de (63) de este tipo, la función

$$v = v(x, t) = \int_{-\infty}^x u(s, t) ds \quad (67)$$

satisface

$$v_t - \nu v_{xx} + |v_x|^2 = 0. \quad (68)$$

Definimos entonces

$$w = v(x, t/\nu)$$

que verifica

$$w_t - w_{xx} + \frac{1}{\nu} |w_x|^2 = 0. \quad (69)$$

Por otra parte

$$z = 2/\nu \quad (70)$$

verifica entonces

$$z_t - z_{xx} + |z_x|^2 = 0. \quad (71)$$

Introducimos por último

$$\eta(x, t) = e^{-z} \quad (72)$$

que satisface entonces la ecuación del calor

$$\eta_t - \eta_{xx} = 0. \quad (73)$$

Deshaciendo este cambio de variables vemos que

$$\begin{aligned} u &= v_x \\ v(\cdot, t/\nu) &= w(\cdot, t) = \nu z(\cdot, t) = -\nu \log(\eta). \end{aligned}$$

Por tanto

$$u(x, t) = -\nu \frac{\eta_x(x, \nu t)}{\eta(x, \nu t)}. \quad (74)$$

La solución η de la ecuación del calor se obtiene por convolución con el núcleo de Gauss:

$$G(x, t) = (4\pi t)^{-1/2} \exp - |x|^2 / 4t, \quad (75)$$

de modo que

$$\eta(x, t) = G(\cdot, t) * \eta_0(\cdot)$$

(x),

donde η_0 es el dato inicial de η .

Por otra parte

$$G_x(x, t) = -\frac{x}{4\sqrt{\pi t^{3/2}}} \exp - |x|^2 / 4t. \quad (77)$$

Obtenemos así

$$u(x, t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} (x-y) e^{-|x-y|^2/4\nu t} \eta_0(y) dy}{2t \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|^2/4\nu t} \eta_0(t) dy}. \quad (78)$$

Ahora bien

$$\eta_0(x) = e^{-\int_{-\infty}^x u_0(\sigma) d\sigma / \nu}. \quad (79)$$

Por tanto

$$u_\nu(x, t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} (x-y) e^{-H(x,y,t)/\nu} dy}{2t \int_{\mathbb{R}} e^{-H(x,y,t)/\nu} dy} \quad (80)$$

donde

$$H(x, y, t) = \frac{|x-y|^2}{4t} + \int_{-\infty}^y u_0(\sigma) d\sigma. \quad (81)$$

De la expresión de esta solución observamos que:

- La función solución $u = u_\nu(x, t)$ es regular para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ cuando u_0 pertenece, por ejemplo, a $L^1(\mathbb{R})$.

Basta para ello utilizar el efecto regularizante de la convolución con el núcleo de Gauss que se deduce de la desigualdad de Young:

$$\| f * g \|_\infty \leq \| f \|_1 \| g \|_\infty. \quad (82)$$

Basta entonces aplicar esta desigualdad utilizando que $G(\cdot, t)$ y sus derivadas de orden arbitrario son, para todo $t > 0$, funciones regulares e integrables y que el dato inicial

$e^{-\nu \int_{-\infty}^x u_0(\sigma) d\sigma}$ está acotado por estarlo $\int_{-\infty}^x u_0(\sigma) d\sigma$, lo cual es a su vez consecuencia de que el dato inicial u_0 sea integrable.

- Cuando el dato inicial u_0 es par, la solución deja de serlo.

Esto es consecuencia del efecto de la convolución no-lineal. Esto no ocurre para las soluciones de la ecuación del calor lineal. En efecto, las soluciones de

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

son de la forma

$$u(x, t) = [G(\cdot, t) * u_0(\cdot)](x)$$

Es por tanto fácil ver que u es par (resp. impar) con respecto a x , para todos $t > 0$, en función de que el dato inicial u_0 lo sea.

Esto, sin embargo, no es así para las soluciones de la ecuación de Burgers que vienen dadas por (70). Esto es por una parte debido a que, en (63) interviene el dato inicial $e^{-\nu \int_{-\infty}^x u_0(\sigma) d\sigma}$, que no preserva la paridad del dato inicial, y a que en el numerador de dicha expresión interviene no sólo el núcleo G sino también G_x .

Lo dicho hasta ahora es válido cuando $\nu > 0$. La expresión (80) presenta una singularidad para $\nu = 0$. Tal y como veremos más adelante, el límite cuando $\nu \rightarrow 0$ de la solución $u_\nu = u_\nu(x, t)$ de (63) es la solución de la ecuación de Burgers sin viscosidad (64).

Analicemos ahora (64). En este caso la transformación de Hopf-Cole no se aplica. De las ideas utilizadas en el caso viscoso la única que puede ser empleada es la de realizar el cambio de variables

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^x u(\sigma, t) d\sigma$$

que reduce (64) a la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$v_t + |v_x|^2 = 0.$$

Pero esta ecuación no se puede linealizar de modo que es mejor resolver directamente (64) mediante el método de las características.

Escribimos (64) en la forma

$$u_t + 2uu_x = 0. \tag{83}$$

Esto permite comprobar que las soluciones de (82), mientras son de clase C^1 , son constantes a lo largo de las características, i.e.

$$u(x(t), t) = C$$

donde $x = x(t)$ está caracterizada por la ecuación

$$x'(t) = 2u(x(t), t). \tag{84}$$

Estas curvas son fáciles de calcular. En efecto, como u es constante a lo largo de características, $u(x(t), t)$ ha de coincidir con su valor en $t = 0$, de modo que

$$u(x(t), t) = u_0(x_0), \quad (85)$$

donde x_0 es el punto de partida de la característica. La ecuación de la recta característica es entonces

$$x(t) = 2u_0(x_0)t + x_0 \quad (86)$$

y por tanto,

$$u(x, t) = u_0(x_0), \quad (87)$$

donde (x, t) y x_0 están relacionadas a través de la identidad (86).

En virtud de este análisis se comprueba que u es constante a lo largo de líneas características de pendiente $1/2u_0$ en el plano (x, t) . De este análisis se deduce que si el dato inicial u_0 es decreciente, u ha de generar una discontinuidad en tiempo finito. En efecto, en la medida en que existen dos puntos x_0, x_1 tales que $x_0 < x_1$ y $u(x_0) > u(x_1)$, las características que arrancan de x_0 y x_1 se cruzarán en un tiempo finito t^* en un punto x . La solución habrá de ser discontinua en (x^*, t^*) puesto que los dos valores $u_0(x_0)$ y $u_0(x_1)$ son incompatibles.

Un análisis más cuidadoso permite calcular el tiempo t^* en el que se produce la discontinuidad o choque. En efecto, las características que, según la ecuación (85), arrancan de x_0 y x_1 , se encuentran en tiempo t^* si

$$2u_0(x_0)t + x_0 = 2u_0(x_1)t + x_1.$$

Esto se produce en tiempo

$$t^* = \frac{x_1 - x_0}{2(u_0(x_0) - u_0(x_1))} = -\frac{x_0 - x_1}{2(u_0(x_0) - u_0(x_1))}. \quad (88)$$

Cuando $x_0 \rightarrow x_1$ el tiempo t^* tiene como límite

$$t^* = -\frac{1}{2u'_0(x_0)}. \quad (89)$$

De esta expresión se deduce que el tiempo mínimo en el que se produce el choque es

$$t^* = \frac{1}{2 \max_{x_0 \in \mathbb{R}} -u'_0(x_0)}$$

. (90)

Vemos por tanto que el comportamiento de la ecuación de Burgers viscosa (63) y la no viscosa (64) es muy dispar en la medida que, mientras las soluciones de (63) son regulares para cualquier $\nu > 0$, las soluciones de (64) son discontinuas cuando el dato inicial es decreciente. Basta de hecho que el dato inicial sea decreciente en un intervalo para que los choques se produzcan en tiempo finito. A pesar de ello, como veremos en la próxima sección, las soluciones en ausencia de viscosidad, son el límite de las de la ecuación de Burgers viscosa cuando $\nu \rightarrow 0^+$.

5.3 Viscosidad evanescente

En esta sección analizamos el comportamiento límite cuando $\nu \rightarrow 0$ de las soluciones (80) de la ecuación de Burgers (63).

Al pasar al límite en (80) cuando $\nu \rightarrow 0^+$, las integrales que intervienen se concentran en torno a los puntos en los que H alcanza su mínimo. Calculamos por tanto los puntos críticos de H :

$$H_y = -\frac{x-\xi}{2t} + u_0(y) = 0 \Leftrightarrow \xi = x - 2tu_0(y), \quad (91)$$

en los que

$$H = -tu_0^2(\xi) + \int_{-\infty}^{\xi} u_0(\sigma) d\sigma. \quad (92)$$

La contribución de una integral

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-H/\nu} dy \quad (93)$$

en un entorno de un punto de mínimo $y = \xi$ es

$$f(\xi) \sqrt{\frac{2\pi\nu}{H''(\xi)}} e^{-H(\xi)/\nu}. \quad (94)$$

En nuestro caso

$$H''(\xi) = \frac{1}{2t}. \quad (95)$$

Aplicando estas fórmulas en las integrales que intervienen en (80) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} (x-y) e^{-H/\nu} dy \sim (x-\xi) \sqrt{\frac{\pi\nu}{t}} e^{-[tu_0^2(\xi) + \int_{-\infty}^{\xi} u_0(\sigma) d\sigma]\nu}, \quad (96)$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-H/\nu} dy \sim \sqrt{\frac{\pi\nu}{t}} e^{-[tu_0^2(\xi) + \int_{-\infty}^{\xi} u_0(\sigma) d\sigma]}. \quad (97)$$

Por tanto,

$$u_\nu(x, t) \sim \frac{(x-\xi)}{2t} \quad (98)$$

donde ξ viene caracterizado por la ecuación

$$\xi = x - 2tu_0(\xi) \quad (99)$$

que es exactamente la expresión obtenida en la sección anterior para la ecuación de Burgers sin viscosidad (64), puesto que $(x-\xi)/2t = u_0(\xi)$.

Esta expresión es válida cuando la función H sólo tiene un mínimo. En caso en que H tiene varios puntos de mínimo ξ_1, \dots, ξ_N , cada uno de ellos contribuye de manera

semejante a las integrales que aparecen en (80). Sin embargo, debido a la presencia el factor exponencial, en la determinación de la forma asintótica de u_ν , sólo intervienen los mínimos absolutos de H . En caso, por ejemplo, de que H posea dos mínimos absolutos ξ_1, ξ_2 , la forma asintótica de u_ν sería:

$$u_\nu(x, t) \sim u_0(\xi_1) + u_0(\xi_2). \quad (100)$$

Más adelante justificaremos rigurosamente estas asíntotas. Pero, por el momento analicemos su significado en lo que se refiere a la ecuación de Burgers (64).

Distinguiamos dos casos: Dato inicial u_0 creciente.

En este caso, tal y como vimos en la sección anterior, el método de las características no predice ningún choque y esperamos que la ecuación de Burgers admita una solución regular siempre y cuando el dato inicial u_0 sea regular.

El análisis asintótico que acabamos de realizar confirma este hecho. En efecto,

$$u_\nu(x, t) \rightarrow u_0(\xi), \nu \rightarrow 0, \quad (101)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}$ viene caracterizado por la ecuación

$$\xi + 2tu_0(\xi) = x. \quad (102)$$

Para $t > 0$, si $u_0(\cdot)$ es creciente, la función

$$\xi \rightarrow \xi + 2tu_0(\xi), \quad (103)$$

también lo es, y por tanto (102) admite una única solución. Esto nos confirma sin ambigüedad alguna que el límite de las soluciones u_ν de la ecuación de Burgers viscosa, cuando la viscosidad $\nu \rightarrow 0$, es la solución de Burgers sin viscosidad obtenida por el método de las características.

Consideramos ahora el caso particular de un dato discontinuo, constante a trozos

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (104)$$

Resolvemos la ecuación de Burgers sin viscosidad (64) con este dato. Es lo que se conoce como problema de Riemann, elemento básico del conocido método de Riemann para la aproximación del dato inicial mediante datos iniciales constantes a trozos.

Si aplicamos el método de las características con el dato inicial u_0 de (104) obtenemos que la solución u de (64) es de la forma

$$u = \begin{cases} 0, & x < 0, t > 0 \\ 1, & x \geq t. \end{cases} \quad (105)$$

Sin embargo, el método de las características no proporciona ningún valor para la solución u en la región $0 < x < t$.

El método de la viscosidad evanescente es en realidad un modo de obtener una solución globalmente definida en este caso. En efecto, consideramos la ecuación (102) en este caso particular. Este sistema se escribe

$$\begin{cases} \xi = x, & \text{si } \xi < 0 \\ \xi + 2t\xi = x, & \text{si } \xi > 0. \end{cases} \quad (106)$$

Cuando $x < 0$, esto nos da como solución $\xi = x$ y por consiguiente, según (101), el valor límite $u = u_0(\xi) = 0$. Esto coincide con lo obtenido en (105). Cuando $x > 0$ obtenemos $\xi = x/(1 + 2t)$. En el límite cuando $\nu \rightarrow 0$, por (102) obtenemos entonces

$$u(x, t) = \frac{x - \xi}{t} = \frac{x}{t} \quad (107)$$

que está ahora globalmente definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

Evidentemente el frente $u = x/t$ conecta adecuadamente el valor constante $u = 0$ a izquierda y el valor $x = 1$ a derecha. Se trata de una *onda de rarefacción*.

Acabamos de ver que el método de la viscosidad evanescente proporciona en el límite una solución de la ecuación de Burgers sin viscosidad (64). Es lo que se denomina *la solución de entropía*.

Tal y como vamos a ver, la ecuación de Burgers puede incluso tener varias soluciones débiles. En este caso, la solución de entropía es la que tiene significado físico puesto que el modelo sin difusión ha de entenderse como una idealización del caso en que la viscosidad es pequeña y tiende a cero.

En la situación presente existen también otras soluciones débiles aunque, como decíamos, la única con significado físico es la denominada de entropía que acabamos de obtener. En vista de que la solución u se anula para $x < 0$ y toma el valor $u = 1$ para $x > t$ es natural considerar también soluciones de la forma

$$u = \begin{cases} 0, & x < \alpha t \\ 1, & x > \alpha t \end{cases} \quad (108)$$

donde la recta $x = \alpha t$ es a determinar. Veámos cual es el valor de α que hemos de elegir para que la función u dada por (104) puede ser una solución débil de la ecuación de Burgers. Recordemos que por ser solución de la ecuación de Burgers

$$u_t + (u^2)_x = 0 \quad (109)$$

es preciso que

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u\varphi_t + u^2\varphi_x) dxdt = 0 \quad (110)$$

para toda función test $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

En el caso de una función de la forma (104), (106) se reduce a

$$\int_0^\infty \int_{\alpha t}^\infty (\varphi_t + \varphi_x) dxdt = 0 \quad (111)$$

lo cual ocurre sí y sólo sí $\alpha = 1$.

Vemos por tanto que la ecuación de Burgers admite también como solución débil aquella que propaga el choque a velocidad 1. Ahora bien esta última solución de choque no es una solución de entropía. Tal y como hemos visto anteriormente la única solución de entropía es aquella que desarrolla la onda de rarefacción.

Un resultado clásico e importante de Kruzkov (véase la sección 11.4.3 de [12]) asegura que la solución de entropía es única. Esta puede caracterizarse no sólo como la solución obtenida por el método de viscosidad evanescente. Otra manera de caracterizarla es, por ejemplo, la siguiente cota unilateral sobre la derivada de la solución

$$u_x \leq 1/2t. \quad (112)$$

Esta cota se obtiene del siguiente modo. Formalmente, si u resuelve (109), entonces $v = u_x$ satisface

$$v_t + (2uv)_x = v_t + 2v^2 + 2uv_x = 0. \quad (113)$$

Aplicando el principio del máximo, deducimos que

$$v \leq w \quad (114)$$

donde $w = w(t)$ es la solución de

$$w_t + 2w^2 = 0 \quad (115)$$

con dato inicial $w(0) = \infty$. Esta solución puede calcularse explícitamente: $w(t) = 1/2t$.

Ahora bien, ¿podemos justificar la aplicación del principio del máximo para ecuaciones de la forma (113) para obtener la comparación (113)? Esta justificación puede en efecto hacerse para las soluciones de entropía. En efecto, si u es solución de entropía, es el límite cuando $\nu \rightarrow 0$ de soluciones u_ν con viscosidad $\nu > 0$. Derivando sus ecuaciones vemos que $v_\nu = u_{\nu,x}$ satisface entonces

$$v_{\nu,t} - \nu v_{\nu,xx} + 2v_\nu^2 + 2u_\nu v_{\nu,x} = 0. \quad (116)$$

En esta ecuación parabólica podemos aplicar el principio del máximo y deducir que

$$v_\nu \leq 1/2t \quad (117)$$

para todo $\nu > 0$. Pasando al límite cuando $\nu \rightarrow 0$ obtenemos la cota (112) para $u_x = v$.

Dato inicial u_0 decreciente.

Según el análisis previo debemos de analizar los valores de ξ para los que

$$\xi + 2tu_0(\xi) = x. \quad (118)$$

Ahora bien, como u_0 es decreciente, no está garantizado que (118) admita una única solución para cada $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$. Más bien al contrario, para $t > 0$ suficientemente grande,

el término $2tu_0(\cdot)$ de la izquierda de (118) dominará y destruirá el carácter monótono creciente de la función $\xi + 2tu_0(\xi)$. De hecho, el análisis de las características ya predecía la aparición de choques en este caso. Ambos hechos son reflejo del mismo fenómeno.

Consideramos nuevamente como caso modelo el problema de Riemann con dato inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (119)$$

En este caso, el cambio de variables (118) no puede aplicarse puesto que u_0 no es integrable en $-\infty$. Para evitar esta dificultad definimos

$$\tilde{u}_\nu(x, t) = -u_\nu(-x, t) \quad (120)$$

de modo que

$$u_\nu(x, t) = -\tilde{u}_\nu(-x, t). \quad (121)$$

La función \tilde{u} es solución de la misma ecuación de Burgers viscosa pero con dato inicial

$$\tilde{u}_0 = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -1, & x > 0. \end{cases} \quad (122)$$

Tenemos ahora que estudiar las raíces de la ecuación

$$\xi + 2t\tilde{u}_0(\xi) = x \quad (123)$$

que puede escribirse en la forma

$$\begin{cases} \xi = x, & \text{si } \xi < 0 \\ \xi - 2t = x, & \text{si } \xi > 0. \end{cases} \quad (124)$$

De (124) deducimos que para $-2t < x < 0$ se obtienen dos soluciones distantes $\xi_1 = x$ y $\xi_2 = x + 2t$. Para el resto de valores de (x, t) se tiene una única solución.

Tenemos ahora que analizar en cuál de estos puntos el valor crítico ξ el valor de H es mínimo. Según (92), en cada punto crítico ξ el valor de H es

$$H(\xi) = t\tilde{u}_0(\xi) + \int_{-\infty}^{\xi} \tilde{u}_0(s) ds. \quad (125)$$

Por tanto, cuando $\xi < 0$,

$$H(\xi) = 0 \quad (126)$$

mientras que, cuando $\xi > 0$, por ejemplo, si $\xi = \xi_2$,

$$H(\xi_2) = t - \int_0^{\xi_2} ds = t - \xi_2 = t - x - 2t = -(t + x). \quad (127)$$

Por tanto

$$\begin{cases} H(\xi_1) < H(\xi_2) & \text{si } t + x < 0 \\ H(\xi_2) < H(\xi_1) & \text{si } t + x > 0. \end{cases} \quad (128)$$

Deducimos así que:

$$u_\nu(x, t) \sim u(x, t) \quad (129)$$

donde

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x < t \\ 0, & x > t. \end{cases} \quad (130)$$

Nuevamente en el límite (130) obtenemos una solución de entropía de la ecuación de Burgers sin viscosidad (64). Se trata de una onda de choque que se propaga a una velocidad 1. Esto es coherente con la condición de Rankine-Hugoniot que se precisa para que una función discontinua pueda ser solución débil de la ecuación de Burgers. Suponiendo que u^\pm son los valores a izquierda y derecha del choque la velocidad de propagación es precisamente

$$s = \frac{(u^+)^2 - (u^-)^2}{u^+ - u^-}.$$

En nuestro caso, con valores $u^- = 1$ y $u^+ = 0$, esto nos da una velocidad de propagación unidad.

Hemos por tanto visto que el método de la viscosidad evanescente permite obtener la solución de la ecuación de Burgers de entropía. Aunque no hayamos probado aquí la unicidad, esta solución es la única que tiene sentido físico.

Mientras la solución es regular coincide con la obtenida por características. Cuando no lo es puede ser de dos tipos: O bien una onda de rarefacción, o una onda de choque, dependiendo del signo del choque, i.e. de los valores relativos de la solución a cada lado del choque. Cuando se tiene choque, éste se propaga con una velocidad que es la indicada por la condición de Rankine-Hugoniot.

Con el objeto de completar esta sección comprobamos por último que el valor asintótico de la integral

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-H/\nu} dy$$

cuando $\nu \rightarrow 0$ es del orden de

$$f(\xi) \sqrt{\frac{2\pi\nu}{H''(\xi)}} e^{-H(\xi)/\nu},$$

siendo ξ el punto mínimo de H . De manera rigurosa, lo que esto significa es que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-H(y)/\nu} dy}{f(\xi) \sqrt{\frac{2\pi\nu}{H''(\xi)}} e^{-H(\xi)/\nu}} = 1.$$

Para comprobarlo, basta ver que

$$J_\nu(y) = \left(\frac{2\pi\nu}{H''(\xi)} \right)^{-1/2} e^{-(H(y)-H(\xi))/\nu}$$

es una aproximación de la identidad cuando $\nu \rightarrow \infty$. Es obvio que, cuando $\nu \rightarrow \infty$, $J_\nu(y) \rightarrow 0$ exponencialmente salvo en el punto de mínimo $y = \xi$.

Por otra parte,

$$\int_{\mathbb{R}} J_\nu(y) dy \rightarrow 1, \nu \rightarrow \infty.$$

En efecto, habida cuenta de que

$$H(y) - H(\xi) = \frac{H''(\xi)}{2}(y-\xi)^2 + O(|y-\xi|^3)$$

y haciendo el cambio de variables

$$\sigma = \sqrt{\frac{H''(\xi)}{2\nu}}(y - \xi)$$

el problema se reduce a probar que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2} e^{-0(\nu^{1/2}\eta^3)} d\eta \rightarrow 1$$

lo cual puede probarse mediante el Teorema de la Convergencia dominada.

El lector interesado en un estudio más detallado de estas cuestiones, para leyes de conservación hiperbólicas más generales, podrá consultar el libro de C. Evans [12].

6 Splitting

6.1 Presentación

En esta sección analizaremos brevemente los métodos de splitting para la resolución de la ecuación de Burgers viscosa

$$u_t - \nu u_{xx} + (u^2)_x = 0. \quad (131)$$

A lo largo de esta sección suponemos que $\nu > 0$ está fijado.

Buena parte de las ideas que aquí introduzcamos serán útiles también en el contexto de las ecuaciones más realistas y complejas de las ecuaciones de Navier-Stokes con viscosidad.

En vista de la propia estructura de la ecuación (131) es obvio que en ella subyacen dos modelos. Por una parte la ecuación del calor

$$u_t - \nu u_{xx} = 0 \quad (132)$$

y por otra, la ecuación de Burgers sin viscosidad

$$u_t + (u^2)_x = 0. \quad (133)$$

De hecho, a través de la transformación de Hopf-Cole, esto ha quedado claramente de manifiesto habiéndose comprobado que la solución de (131) incorpora tanto efectos viscosos como convectivos.

En este tipo de situaciones en los que el modelo en consideración incorpora dos subsistemas bien reconocibles es natural utilizar métodos de descomposición o “splitting” que permiten obtener la solución del sistema global a partir de la solución de cada subsistema y por otra parte aplicar a cada uno de los subsistemas un método numérico específico.

En las notas [?] describíamos algunas ideas básicas de los métodos de descomposición. En particular presentamos el Teorema de Lie que demuestra que para dos matrices $n \times n$ A_1 y A_2 cualesquiera se tiene

$$e^{A_1+A_2} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(e^{A_1/j} e^{A_2/j} \right)^j, \quad (134)$$

con independencia de que A_1 y A_2 conmuten o no. Esto resulta de utilidad a la hora de resolver la ecuación diferencial

$$x' = (A_1 + A_2)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(0) = x_0, \quad (135)$$

puesto que su solución es de la forma

$$x(t) = e^{(A_1+A_2)t} x_0. \quad (136)$$

La ecuación de Burgers viscosa (131) puede también entenderse como un problema de la forma (135), si bien en este caso la incógnita $u = u(x, t)$ es, para cada $t > 0$, una función que depende de x y que por tanto pertenece a un espacio de dimensión infinita, A_1 es el operador diferencial $A_1 u = \partial_x^2 u$ y A_2 es el operador no-lineal $A_2 u = -(u^2)_x$.

En esta sección vamos a introducir esquemas de descomposición para las versiones discretas de estas ecuaciones.

Consideramos por tanto el modelo (135) que puede discretizarse en tiempo con paso Δt sustituyendo, como es habitual, la derivada $x'(t)$ por un cociente incremental en el intervalo $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$. El tipo de esquemas de descomposición que vamos a utilizar se basan en la utilización de un nodo adicional (o varios), por ejemplo en el punto medio $(n+1/2)\Delta t$, de modo que en cada subintervalo $[n\Delta t, (n+1/2)\Delta t]$ y $[(n+1/2)\Delta t, (n+1)\Delta t]$, veamos (135) como un sistema en el que domina A_1 o A_2 .

En la sección siguiente analizaremos la validez de las discretizaciones temporales a la hora de aproximar las soluciones de EDP de evolución. Tal y como veremos, este tipo de métodos, clásicos y bien comprendidos en el marco de las EDOs, es también de aplicación en EDPs, incluso en el marco no-lineal en el que la teoría clásica de semigrupos lineales no se aplica, haciéndose necesaria la utilización de ideas propias de los semigrupos no-lineales.

6.2 Peaceman-Rachford

Introducimos en primer lugar el esquema de Peaceman-Rachford:

$$\begin{cases} x^0 = x^0 \\ \frac{x^{n+1/2} - x^n}{\Delta t/2} = A_1 x^{n+1/2} + A_2 x^n \\ \frac{x^{n+1} - x^{n+1/2}}{\Delta t/2} = A_1 x^{n+1/2} + A_2 x^{n+1}. \end{cases} \quad (137)$$

Vemos que el esquema así obtenido es doblemente implícito, una primera vez al pasar de x^n a $x^{n+1/2}$ y después al pasar de $x^{n+1/2}$ a x^{n+1} . En cada caso sin embargo, nos apoyamos principalmente en uno de los operadores A , B considerando al otro como una perturbación que incorpora la información del paso anterior.

Con el objeto de entender el efecto que este esquema de descomposición tiene sobre un sistema consideremos el caso del sistema más sencillo posible

$$x'(t) = Ax(t), \quad t > 0; \quad x(0) = x_0, \quad (138)$$

siendo A una matriz simétrica definida negativa para la que la solución es de la forma

$$x(t) = e^{At} x_0. \quad (139)$$

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ son los autovalores de la matriz A y e_1, \dots, e_N los correspondientes autovectores, las soluciones son combinaciones lineales de soluciones elementales de la forma

$$x(t) = e^{\lambda_j t} e_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (140)$$

Como $\lambda_j \leq 0$, $j = 1, \dots, N$ vemos, obviamente que

$$|x(t)| \leq |x_0|, \quad \forall t \geq 0, \quad (141)$$

para toda solución.

Descomponemos ahora la matriz A como

$$A = \alpha A + \beta A \quad (142)$$

de modo que

$$A_1 = \alpha A, \quad A_2 = \beta A, \quad (143)$$

con

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (144)$$

Aplicando el esquema de descomposición (137) obtenemos

$$x^{k+1} = \left(I - \frac{\Delta t}{2} \beta A \right)^{-1} \left(I + \frac{\Delta t}{2} \alpha A \right) \left(I - \frac{\Delta t}{2} \alpha A \right)^{-1} \left(I + \frac{\Delta t}{2} \beta A \right) x^k.$$

Iterando esta identidad obtenemos

$$x^k = \left(I - \frac{\Delta t}{2}\beta A\right)^{-k} \left(I + \frac{\Delta t}{2}\alpha A\right)^k \left(I - \frac{\Delta t}{2}\alpha A\right)^{-k} \left(I + \frac{\Delta t}{2}\beta A\right)^k x^0.$$

Cuando aplicamos esta identidad en la dirección de cada uno de los vectores propios e_j , i.e. con $x^0 = e_j$, deducimos que

$$x_j^k = \left(\frac{1 + \frac{\Delta t}{2}\alpha\lambda_j}{1 - \frac{\Delta t}{2}\alpha\lambda_j}\right)^k \left(\frac{1 + \frac{\Delta t}{2}\beta\lambda_j}{1 - \frac{\Delta t}{2}\beta\lambda_j}\right)^k e_j.$$

Teniendo en cuenta que

$$\left|\frac{1 + \xi}{1 - \xi}\right| \leq 0, \forall \xi < 0$$

deducimos la estabilidad del esquema puesto que

$$|x_j^k| \leq |e_j|, \forall k \geq 0, \forall j = 1, \dots, N.$$

Además en el caso en que $\lambda_j < 0$, $j = 1, \dots, N$, en el que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ exponencialmente, la solución discreta también reproduce este comportamiento puesto que

$$\left|\frac{1 + \frac{\Delta t}{2}\alpha\lambda_j}{1 - \frac{\Delta t}{2}\alpha\lambda_j}\right| < 1, \left|\frac{1 + \frac{\Delta t}{2}\beta\lambda_j}{1 - \frac{\Delta t}{2}\beta\lambda_j}\right| < 1, j = 1, \dots, N.$$

Con el objeto de estudiar más en detalle este esquema introducimos la función racional

$$R_1(\xi) = \left(\frac{1 + \frac{\alpha\xi}{2}}{1 - \frac{\alpha\xi}{2}}\right) \left(\frac{1 + \frac{\beta\xi}{2}}{1 - \frac{\beta\xi}{2}}\right)$$

que admite, en un entorno de $\xi = 0$, el desarrollo de Taylor

$$R_1(\xi) = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2} + (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) \frac{\xi^3}{4} + O(1)\xi^4$$

mientras que la función exponencial que interviene en la resolución de la ecuación diferencial tiene el desarrollo

$$e^\xi = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} + O(\xi^4).$$

De estos dos desarrollos de Taylor se deduce que el esquema es consistente de orden dos para cualquier elección de los parámetros $0 < \alpha, \beta < 1$ tal que $\alpha + \beta = 1$. La menor diferencia en el término de orden 3 se produce para la elección $\alpha = \beta = 1/2$.

El esquema es por tanto convergente de orden 2.

El único inconveniente de este método es su falta de estabilidad absoluta o de estabilidad stiff que se pone de manifiesto en el hecho que $R_1(\xi) \rightarrow 1$ cuando $\xi \rightarrow -\infty$.

Como ξ juega el papel de $\Delta t \lambda$, esto indica que la velocidad exponencial de convergencia se pierde a medida que $|\Delta t|$ aumenta. Pero esto es inevitable en el marco de las ecuaciones parabólicas en las que típicamente λ recorre una sucesión infinita que tiene a $-\infty$. Sea cual sea el valor de $\Delta t > 0$ elegido, por pequeño que este sea, el esquema numérico es incapaz de reproducir la dinámica de la EDP en la que a medida que $|\lambda|$ aumenta, la estabilidad exponencial de las soluciones de acentúa.

El método de Peacema-Rachford que acabamos de describir es uno de la amplia familia de métodos de descomposición o de direcciones alternadas cuyo abanico de aplicaciones es muy amplio.

Consideremos por ejemplo el problema de Dirichlet para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, t > 0 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (145)$$

Analicemos el caso en que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

El esquema semi-discreto más elemental para la aproximación numérica de este sistema es el que se obtiene al utilizar el esquema de aproximación de cinco puntos para el Laplaciano. Obtenemos así:

$$\begin{cases} u_{i,j} + \frac{2u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{2u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{h_2^2} = 0, & (i, j) \in \Omega, t > 0 \\ u_{i,j} = 0, & (i, j) \in \partial\Omega, t > 0 \\ u_{i,j}(0) = u_{0,i,j}, & (i, j) \in \Omega. \end{cases} \quad (146)$$

En estas expresiones utilizamos las notaciones habituales, de modo que h_1 denota el paso del mallado en la variable x_1 , h_2 el del mallado en la dirección x_2 , $u_{i,j}$ la aproximación de la solución u en el punto $(h_1 i, h_2 j)$, $(i, j) \in \Omega$ los índices tales que el punto correspondiente del mallado $(h_1 i, h_2 j)$ pertenece al dominio Ω y $(i, j) \in \partial\Omega$ para los puntos del mallado que están sobre la frontera $\partial\Omega$. Esto es rigurosamente válido cuando toda la frontera $\partial\Omega$ está constituida por puntos del mallado. En el caso general, es preciso aproximar la frontera $\partial\Omega$ mediante una frontera embebida en el mallado.

Denotando mediante U_h el vector incógnita $(u_{i,j})$ que contiene todos los valores numéricos, el sistema (146) puede escribirse en la forma

$$\begin{cases} \frac{dU_h}{dt} + A_{1h}U_h + A_{2h}U_h = 0, t > 0 \\ U_h(0) = U_{h,0}, \end{cases} \quad (147)$$

donde A_{1h} y A_{2h} son los análogos discretos de $\partial^2/\partial x_1^2$ y $\partial^2/\partial x_2^2$, respectivamente.

Este sistema puede aproximarse mediante los esquemas de discretización temporal clásicos como son los esquemas de Euler explícitos e implícitos o el de Crank-Nicolson. Pero podemos también aplicar el esquema de Peaceman-Rachford que se puede escribir

de manera sintética como sigue

$$\begin{cases} \frac{U_h^{n+1/2} - U_h^n}{\Delta t/2} = A_{1h}U_h^{n+1/2} + A_{2h}U_h^n \\ \frac{U_h^{n+1} - U_h^{n+1/2}}{\Delta t/2} = A_{1h}U_h^{n+1/2} + A_{2h}U_h^{n+1}. \end{cases} \quad (148)$$

El sistema (148) consiste esencialmente en dos sistemas desacoplados, semejantes a los que se obtienen al discretizar la ecuación del calor $1-d$. En efecto, tanto la matriz A_{1h} como A_{2h} que intervienen en cada uno de ellos son las matrices habituales en la discretización numérica de la ecuación del calor $1-d$. Se trata por tanto de sistemas tridiagonales fáciles de resolver.

Este método se denomina de *direcciones alternadas* puesto que la ecuación del calor $2-d$ se aproxima mediante la resolución iterada de ecuaciones del calor alternadamente en las variables x_1 y x_2 .

Pero volvamos al sistema abstracto general (138) y a su discretización (137). En (135) los operadores A_1 y A_2 juegan papeles totalmente simétricos, pero puede también utilizarse de manera asimétrica. Por ejemplo si aplicamos (137) para la aproximación de (138) con $A_1 = A$ y $A_2 = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{x^{n+1/2} - x^n}{\Delta t/2} &= Ax^{n+1/2} \\ \frac{x^{n+1} - x^{n+1/2}}{\Delta t/2} &= Ax^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Se observa por tanto que $x^{n+1/2} = (x^{n+1} + x^n)/2$, lo cual a su vez implica que

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = A \left(\frac{x^{n+1} + x^n}{2} \right).$$

Tomando $A_1 = 0$ y $A_2 = A$ en la descomposición llegamos exactamente a la misma expresión. Pero esto sólo es cierto cuando el sistema considerado es autónomo. En efecto, cuando el operador A depende también de t , mientras que la primera elección conduce al sistema

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = A \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) \left(\frac{x^{n+1} + x^n}{2} \right) \quad (149)$$

la segunda proporciona

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} [A(nt)x^n + A((n+1)\Delta t)x^{n+1}]. \quad (150)$$

Un análisis más cuidadoso indica que, para que ambos esquemas coincidan, no sólo es necesario que A sea independiente de t , i.e. que el sistema sea autónomo, sino también que A sea lineal. En el caso en que A sea no-lineal la diferencia entre (149) y (150) es obvia.

Ambos esquemas son esquemas de tipo Crank-Nicolson y son de orden dos cuando el operador A es suficientemente regular tanto en t como en x .

Estos esquemas pueden también escribirse como

$$\begin{cases} x^{n+1/2} &= x^n + \frac{\Delta t}{2} A(x^{n+1/2}, (n+1/2)\Delta t) \\ x^{n+1} &= x^n + \Delta t A(x^{n+1/2}, (n+\frac{1}{2})\Delta t) \\ &= x^n + 2(x^{n+1/2} - x^n) \end{cases} \quad (151)$$

y

$$x^{n+1} = x^n + \frac{\Delta t}{2} [A(x^n, n\Delta t) + A(x^{n+1}, (n+1)\Delta t)], \quad (152)$$

respectivamente. Se trata pues de esquemas semi-implícitos de Runge-Kutta de orden 2.

6.3 Douglas-Rachford

Existen otras variantes del esquema de descomposición considerado. Tenemos por ejemplo el esquema de Douglas-Rachford que, conocido x^n , calcula el valor de \hat{x}^{n+1} y x^{n+1} , siendo x^{n+1} la aproximación del estado x en el tiempo posterior y \hat{x}^{n+1} un valor auxiliar. El esquema es de la forma

$$\begin{cases} \frac{\hat{x}^{n+1} - x^n}{\Delta t} &= A_1(\hat{x}^{n+1}, (n+1)\Delta t) + A_2(x^n, n\Delta t) \\ \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} &= A_1(\hat{x}^{n+1}, (n+1)\Delta t) + A_2(x^{n+1}, (n+1)\Delta t). \end{cases} \quad (153)$$

La convergencia de este esquema es conocida en un contexto muy general de operadores monótonos A_1 y A_2 . Analicemos, como en el caso anterior, la convergencia en el caso más sencillo en que A es una matriz simétrica $N \times N$.

En este caso obtenemos, con la descomposición (142),

$$x^{n+1} = (I - \beta\Delta t A)^{-1}(I - \alpha\Delta t A)^{-1}(I - \alpha\beta|\Delta t|^2 A^2)x^n,$$

o, lo que es lo mismo,

$$x^n = (I - \beta\Delta t A)^{-n}(I - \alpha\Delta t A)^{-n}(I - \alpha\beta|\Delta t|^2 A^2)x^0.$$

Aplicando el esquema en cada una de las direcciones propias de la matriz A deducimos que

$$x_j^k = \frac{(1 + \alpha\beta|\Delta t|^2 \lambda_j^2)^k}{(1 + \alpha\Delta t \lambda_j)^k (1 + \beta\Delta t \lambda_j)^k} x_{0j}, \quad j = 1, \dots, N, \quad k \geq 1.$$

La funcional racional asociada al esquema es por tanto en este caso

$$R_2(\xi) = \frac{1 + \alpha\beta\xi^2}{(1 - \alpha\xi)(1 - \beta\xi)}.$$

Como $0 < R_2(\xi) < 1$ para todo $\xi < 0$, se deduce que

$$\left| x_j^k \right| \leq \left| x_j^0 \right|, \forall j = 1, \dots, N, k \geq 1,$$

lo cual implica la estabilidad incondicional del esquema. Sin embargo, como

$$R_2(\xi) = 1 + \xi + \xi^2 + O(\xi^3)$$

se observa que este esquema de Douglas-Rachford es sólo consistente de orden 1.

Nuevamente tenemos que

$$R_2(\xi) \rightarrow 1, \xi \rightarrow -\infty$$

lo cual indica que el esquema tendrá un mal comportamiento para los sistemas “stiff” en lo que respecta la estabilidad absoluta.

Conviene observar que en este esquema los papeles jugados por A_1 y A_2 no son simétricos.

Este esquema es más fácil de generalizar al caso de descomposiciones en un mayor número de operadores que el esquema de Peaceman-Rachford.

Si en (153) tomamos $A_1 = 0$ y $A_2 = A$ o $A_1 = A$ y $A_2 = 0$, obtenemos en ambos casos el esquema de Euler implícito.

6.4 θ -método

Consideramos por último el θ -método introducido por Glowinski. Supuesto conocido x^k , calculamos $x^{k+\theta}$, $x^{k+1-\theta}$ y x^{k+1} del siguiente modo:

$$\begin{cases} \frac{x^{k+\theta} - x^k}{\theta \Delta t} &= A_1(x^{k+\theta}, (k+\theta)\Delta t) + A_2(x^k, k\Delta t), \\ \frac{x^{k+1-\theta} - x^{k+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} &= A_1(x^{k+\theta}, (k+\theta)\Delta t) + A_2(x^{k+1-\theta}, (k+1-\theta)\Delta t), \\ \frac{x^{k+1} - x^{k+1-\theta}}{\theta \Delta t} &= A_1(x^{k+1}, (k+1)\Delta t) + A_2(x^{k+1-\theta}, (k+1-\theta)\Delta t). \end{cases} \quad (154)$$

Conviene distinguir este esquema del habitual θ -esquema, intermedio entre los esquemas de Euler explícito e implícito.

Analicemos el esquema (154) en el caso en que A es una matriz simétrica. Tenemos en este caso

$$x^{k+1} = (I - \alpha\theta\Delta t A)^{-2}(I + \beta\theta\Delta t A)^2(I - \beta\theta'\Delta t A)^{-1}(I + \alpha\theta'\Delta t A)x^k, \quad (155)$$

donde $\theta' = 1 - 2\theta$, de modo que

$$x_j^k = \frac{(1 + \beta\theta\Delta t \lambda_j)^{2k}(1 + \alpha\theta'\Delta t \lambda_j)^k}{(1 - \alpha\theta\Delta t \lambda_j)^{2k}(1 - \beta\theta'\Delta t \lambda_j)^k} e_j. \quad (156)$$

La función racional característica del esquema es por tanto en este caso

$$R_3(\xi) = \frac{(1 + \beta\theta\xi)^2(1 + \alpha\theta'\xi)}{(1 - \alpha\theta\xi)^2(1 - \beta\theta'\xi)}. \quad (157)$$

Como

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} R_3(\xi) = \beta/\alpha, \quad (158)$$

para alcanzar la estabilidad del esquema es necesario imponer la condición $\alpha \geq \beta$ y la condición $\alpha > \beta$ para alcanzar la estabilidad absoluta.

La estabilidad incondicional del esquema exige que

$$|R_3(\xi)| \leq 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^-. \quad (159)$$

Un análisis más cuidadoso permite probar que

$$|R_3(\xi)| < 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^- \quad (160)$$

se verifica al menos siempre y cuando θ, α y β están en el rango

$$\theta \in [1/4, 1/2), 0 < \beta < \alpha < 1, \alpha + \beta = 1. \quad (161)$$

Por otra parte

$$R_3(\xi) = 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2} [1 + (\beta - \alpha)(2\theta^2 - 4\theta + 1)] + O(\xi^3), \quad (162)$$

de modo que el esquema es consistente de orden dos sí y sólo sí

$$\alpha = \beta = 1/2 \quad (163)$$

o bien

$$\theta = 1 - 1/\sqrt{2}. \quad (164)$$

Si se elige $\alpha = \beta = 1/2$ se pierde la estabilidad absoluta. Conviene pues elegir θ según (164).

A la hora de aplicar el θ -método en el contexto de las EDP, es conveniente que en cada una de las tres ecuaciones de (154) la ecuación sea la misma. Esto conduce a la condición

$$\alpha\beta = \beta(1 - 2\theta), \quad (165)$$

lo cual implica

$$\alpha = (1 - 2\theta)/(1 - \theta); \beta = \theta/(1 - \theta). \quad (166)$$

Combinando (166) con la condición $\alpha > \beta$ deducimos que $0 < \theta < 1/3$.

Un análisis más cuidadoso muestra la existencia de θ^* ($\theta^* = 0.087385580, \dots$) de modo que para $\theta^* < \theta < 1/3$ el esquema es incondicionalmente y absolutamente estable. Con la elección $\theta = 1 - 1/\sqrt{2} = 0.292893219 \dots$ se garantiza asimismo que el esquema sea de orden dos.

6.5 Aplicación del “splitting” a la ecuación de Burgers

En esta sección vamos a aplicar el θ -método de splitting descrito en la sección anterior a la ecuación de Burgers viscosa:

$$\begin{cases} u_t - \nu u_{xx} + (u^2)_x = f, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u = 0, & x = 0, 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (167)$$

Estamos considerando el problema en un abierto acotado con condiciones de contorno de Dirichlet. Obviamente, al abordar el problema de Cauchy en toda la recta real esto exige un primer paso en la aproximación consistente en sustituir la recta real \mathbb{R} por un intervalo acotado $[-k, k]$ con k suficientemente grande. El error cometido en dicha aproximación puede estimarse mediante un método de energía. De este modo acabamos habiendo de abordar el problema de Dirichlet en un intervalo acotado, problema que nos ocupa en esta sección.

Aplicando el θ -método obtenemos la siguiente secuencia de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{u^{k+\theta} - u^k}{\theta \Delta t} - \alpha \nu u_{xx}^{k+\theta} = f^{k+\theta} = \beta \nu u_{xx}^k - \left((u^k)^2 \right)_x, & 0 < x < 1 \\ u^{k+\theta} = 0, & x = 0, 1, \end{cases} \quad (168)$$

$$\begin{cases} \frac{u^{k+1-\theta} - u^{k+\theta}}{(1-\theta)\Delta t} - \beta \nu u_{xx}^{k+1-\theta} + \left((u^{k+1-\theta})^2 \right)_x = f^{k+\theta} + \alpha \nu u_{xx}^{k+\theta}, & 0 < x < 1 \\ u^{k+1-\theta} = 0, & x = 0, 1, \end{cases} \quad (169)$$

$$\begin{cases} \frac{u^{k+1} - u^{k+1-\theta}}{\Delta t} - \alpha \nu u_{xx}^{k+1} = f^{k+1} + \beta \nu u_{xx}^{k+1-\theta} - \left((u^{k+1-\theta})^2 \right)_x, & 0 < x < 1 \\ u^{k+1} = 0, & x = 0, 1. \end{cases} \quad (170)$$

Conviene señalar que (168) y (170) se reducen a resolver un *problema de Dirichlet lineal*, que puede ser resuelto utilizando un método de elementos finitos, lo cual proporciona un esquema completamente discreto.

El problema (169) es no-lineal aunque los experimentos numéricos indican que se obtienen esencialmente los mismos resultados si la no-linealidad $\left((u^{k+1-\theta})^2 \right)_x$ se sustituye por $2(u^{k+\theta} (u^{k+1-\theta})_x)$, en cuyo caso el sistema reducido que se obtiene tiene la virtud de ser lineal.

En el contexto de las ecuaciones de Navier-Stokes, el θ -método tiene la virtud de permitir desacoplar la no-linealidad de la condición de incompresibilidad. Obtenemos así

$$\begin{cases} \frac{u^{k+\theta} - u^k}{\theta \Delta t} - \alpha \nu \Delta u^{k+\theta} + \nabla p^{k+\theta} = f^{k+\theta} + \beta \nu \Delta u^k - (u^k \cdot \nabla) u^k & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot u^{k+\theta} = 0 & \text{en } \Omega, \\ u^{k+\theta} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{u^{k+1-\theta} - u^{k+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} - \beta\nu\Delta u^{k+1-\theta} + (u^{k+1-\theta} \cdot \nabla) u^{k+1-\theta} = f^{k+\theta} + \alpha\nu\Delta u^{k+\theta} - \nabla p^{k+\theta} & \text{en } \Omega \\ u^{k+1-\theta} = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{u^{k+1} - u^{k+1-\theta}}{\theta\Delta t} - \alpha\nu\Delta u^{k+1} + \nabla p^{k+1} = f^{k+1} + \beta\nu\Delta u^{k+1-\theta} - (u^{k+1-\theta} \cdot \nabla) u^{k+1-\theta} & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot u^{k+1} = 0 & \text{en } \Omega, \\ u^{k+1} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

7 Ecuaciones elípticas de convección-difusión

Como hemos visto en la sección anterior, al aplicar el método de splitting a la ecuación de Burgers viscosa obtenemos una familia de problemas elípticos con convección cuadrática de la forma

$$\begin{cases} -\nu u_{xx} + (u^2)_x = f, & 0 < x < 1 \\ u = 0, & x = 0, 1. \end{cases} \quad (171)$$

En esta sección analizamos brevemente la existencia y unicidad de soluciones para esta ecuación.

Comenzamos recordando los resultados elementales para el problema de Dirichlet lineal en ausencia de convección:

$$\begin{cases} -\nu u_{xx} = f, & 0 < x < 1 \\ u = 0, & x = 0, 1. \end{cases} \quad (172)$$

En este caso es bien sabido que para cada $f \in H^{-1}(0, 1)$ existe una única solución débil $u \in H_0^1(0, 1)$ que satisface

$$\begin{cases} \nu \int_0^1 u_x \varphi_x dx = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1(0, 1) \\ u \in H_0^1(0, 1). \end{cases} \quad (173)$$

En (173) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto de dualidad entre $H^{-1}(0, 1)$ y $H_0^1(0, 1)$. Además, cuando $f \in L^2(0, 1)$ la solución pertenece a $H^2(0, 1)$.

La solución débil puede obtenerse mediante la aplicación directa del Lema de Lax-Milgram o bien mediante el Método Directo del Cálculo de Variaciones (MDCV), minimizando el funcional

$$\begin{cases} J : H_0^1(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \\ J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 |v_x|^2 dx - \langle f, v \rangle. \end{cases} \quad (174)$$

El modo más simple de abordar el problema no-lineal (171) es mediante una técnica de punto fijo. Para cada $v \in H_0^1(0, 1)$ podemos considerar el problema

$$\begin{cases} -\nu u_{xx} = f - (v^2)_x, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (175)$$

Como $f - (v^2)_x \in H^{-1}(0, 1)$, el problema (175) admite una única solución $u \in H_0^1(0, 1)$. Esto nos permite definir una aplicación no-lineal $\mathcal{N} : H_0^1(0, 1) \rightarrow H_0^1(0, 1)$ que a $v \in H_0^1(0, 1)$ asocia $\mathcal{N}v = u$. No es difícil de comprobar que esta aplicación es compacta. Basta para ello constatar que si v varía en un conjunto acotado de $H_0^1(0, 1)$, entonces $(v^2)_x = 2vv_x$ varía en un conjunto acotado de $L^2(0, 1)$ y por tanto en un conjunto compacto de $H^{-1}(0, 1)$. Es pues natural aplicar el Teorema de Schauder. Pero esto no es directamente posible. En efecto

$$\begin{aligned} \nu \| \mathcal{N}(v) \|_{H_0^1(0,1)}^2 &= \| f - (v^2)_x \|_{H^{-1}(0,1)} \leq \| f \|_{H^{-1}(0,1)} + \| v^2 \|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \| f \|_{H^{-1}(0,1)} + C \| v \|_{H_0^1(0,1)}^2. \end{aligned} \quad (176)$$

Por tanto,

$$\| u \|_{H_0^1(0,1)} \leq \frac{\| f \|_{H^{-1}(0,1)}}{\nu} + \frac{C}{\nu} \| v \|_{H_0^1(0,1)}^2. \quad (177)$$

Con el objeto de aplicar el Teorema de Schauder lo más simple es buscar una bola B_R de $H_0^1(0, 1)$ en la que la aplicación de \mathcal{N} sea invariante. En virtud de la estimación (177) esto exige que

$$\frac{\| f \|_{H^{-1}(0,1)}}{\nu} + \frac{C}{\nu} R^2 \leq R, \quad (178)$$

lo cual es posible para cualquier $f \in H^{-1}(0, 1)$ si $\nu > 0$ es suficientemente grande o bien para $\nu > 0$ arbitrario, siempre y cuando $\| f \|_{H^{-1}(0,1)}$ sea suficientemente pequeño con respecto a ν .

Pero este punto de vista no permite resolver el problema no-lineal (171) en toda su generalidad. Con el objeto de hacerlo introducimos una aproximación acotada de la no-linealidad cuadrática que interviene en (171), i.e.

$$\phi_k(s) = \min(s^2, k). \quad (179)$$

Consideramos ahora, en lugar de (171), el problema con no-linealidad truncada

$$\begin{cases} -\nu u_{xx} + (\phi_k(u))_x = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (180)$$

En esta ocasión el argumento anterior permite concluir la existencia de una solución $u_k \in H_0^1(0, 1)$. En efecto, en el presente caso, la condición sobre el radio R de la bola B_R que se precisa para aplicar el Teorema del punto fijo de Schauder es simplemente

$$\frac{\| f \|_{H^{-1}(0,1)}}{\nu} + \frac{Ck^2}{\nu} \leq R, \quad (181)$$

que, evidentemente, se cumple si $R > 0$ es suficientemente grande.

Por otra parte, no es difícil obtener una cota uniforme sobre la sucesión de soluciones aproximadas $\{u_k\}_{k \geq 0}$. En efecto, multiplicando en (180) por u_k e integrando por partes

o, más bien, utilizando la propia función u_k como función test en la formulación débil de (180) obtenemos

$$\nu \int_0^1 |u_{k,x}|^2 dx - \int_0^1 \phi_k(u_k) u_{k,x} dx = \langle f, u_k \rangle. \quad (182)$$

Ahora bien, como

$$\phi_k(u_k) u_{k,x} = \frac{\partial}{\partial x} (\psi_k(u_k))$$

donde

$$\psi_k(s) = \int_\sigma^s \phi_k(\sigma) d\sigma,$$

se tiene

$$\int_0^1 \phi_k(u_k) u_{k,x} dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (\psi_k(u_k)) dx = 0. \quad (183)$$

Por tanto

$$\nu \int_0^1 |u_{k,x}|^2 dx = \langle f, u_k \rangle \quad (184)$$

lo cual implica la cota

$$\|u_k\|_{H_0^1(0,1)} \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{H^{-1}(0,1)}, \quad \forall k \geq 1. \quad (185)$$

Esto permite pasar al límite en las soluciones aproximadas. En efecto, como $\{u_k\}$ está acotada en $H_0^1(0, 1)$ se puede extraer una subsucesión, que seguimos denotando mediante $\{u_k\}$, tal que

$$u_k \rightharpoonup u \text{ débilmente en } H_0^1(0, 1). \quad (186)$$

Esta sucesión puede además extraerse de modo que

$$u_k \longrightarrow u \text{ fuertemente en } L^2(0, 1) \quad (187)$$

y

$$u_k \longrightarrow u \text{ en } C^0(0, 1). \quad (188)$$

Esto permite pasar al límite en la formulación débil de (180):

$$\int_0^1 u_{k,x} \varphi_x dx - \int_0^1 \phi_k(u_k) \varphi_x dx = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1(0, 1). \quad (189)$$

En efecto, pasando al límite en (189) obtenemos que el límite $u \in H_0^1(0, 1)$ es solución débil de (171) puesto que satisface

$$\int_0^1 u_x \varphi_x dx - \int_0^1 u^2 \varphi_x dx = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1(0, 1). \quad (190)$$

En virtud de la convergencia débil en $H_0^1(0, 1)$ de $\{u_k\}$, la única dificultad para obtener (190) de (189) es el paso al límite en el término no-lineal. Esto puede hacerse comprobando que

$$\phi_k(u_k) \rightharpoonup u^2 \text{ débilmente en } L^2(0, 1).$$

Esto es así puesto que, en virtud de (188),

$$\phi_k(u_k) \longrightarrow u^2, x \in (0, 1)$$

y, por otra parte,

$$\|\phi_k(u_k)\|_{L^\infty(0,1)} \leq \|u_k^2\|_{L^\infty(0,1)} \leq \|u_k\|_{L^\infty(0,1)}^2 \leq C \|u\|_{H_0^1(0,1)}^2 \leq C. \quad (191)$$

En este punto hemos usado el siguiente lema clásico de convergencia que se demuestra gracias al Teorema de Egorov.

Lemme 7.1. *Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n . Sea $h_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tales que*

$$\|h_k\|_{L^p(\Omega)} \leq C, \forall k \geq 1$$

con $p > 1$ y

$$h_k \longrightarrow h, x \in \Omega.$$

Entonces

$$h_k \longrightarrow h \text{ en } L^q(\Omega), \forall 1 \leq q < p$$

y

$$h_k \longrightarrow h \text{ débilmente en } L^p(\Omega),$$

si $p < \infty$ o débil-* en L^∞ si $p = \infty$.

Gracias a este argumento que combina la aproximación por truncatura y el paso al límite hemos probado la existencia de al menos una solución de (171) para cada $f \in H^{-1}(0, 1)$ y cada $\nu > 0$.

Veamos ahora que esta solución es única.

Como es habitual en estos casos suponemos que existen dos soluciones u_1, u_2 , definimos $v = u_1 - u_2$ e intentamos probar que $v \equiv 0$. La función v satisface

$$\begin{cases} -\nu v_{xx} + (u_1^2 - u_2^2)_x = 0, & 0 < x < 1, \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases} \quad (192)$$

Si bien el resultado de unicidad se cumple para todo $\nu > 0$, en estas notas lo probaremos únicamente para $\nu > 0$ suficientemente grande.

Multiplicando en (192) por v e integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \nu \int_0^1 v_x^2 dx &= \int_0^1 (u_1 + u_2) v v_x dx \\ &\leq \|u_1 + u_2\|_{L^\infty(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)} \|v_x\|_{L^2(0,1)} \end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$\nu \|v\|_{H_0^1(0,1)} \leq C \|u_1 + u_2\|_{L^\infty(0,1)} \|v\|_{H_0^1(0,1)}$$

con $C > 0$, independiente de ν . Es decir

$$\nu \leq C \|u_1 + u_2\|_{L^\infty(0,1)}. \quad (193)$$

Ahora bien, cualquier solución de (171) satisface

$$\nu \int_0^1 u_x^2 dx = \langle f, u \rangle.$$

Esto es así puesto que

$$\int_0^1 u^2 u_x dx = 0.$$

Por tanto

$$\nu \|u_x\|_{H_0^1(0,1)} \leq \|f\|_{H^{-1}(0,1)},$$

y por consiguiente,

$$\nu \|u\|_{L^\infty(0,1)} \leq C \|f\|_{H^{-1}(0,1)}. \quad (194)$$

Combinando (193) y (194) se deduce que

$$\nu \leq \frac{C}{\nu} \|f\|_{H^{-1}(0,1)},$$

lo cual es imposible si $\nu > 0$ es suficientemente grande.

Esto prueba la unicidad si $\nu > 0$ es suficientemente grande.

Los mismos argumentos permiten probar la existencia y unicidad (si $\nu > 0$ es grande) para las soluciones del problema de Navier-Stokes estacionario

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Esto justifica la existencia y unicidad de las soluciones aproximadas obtenidas mediante la aplicación del θ -método de splitting de la sección anterior.

8 Semigrupos no-lineales

Hemos aplicado métodos de “splitting” o de descomposición para ecuaciones discretas en tiempo, inspirándonos en la teoría clásica de aproximación numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Son dos las razones principales para considerar esquemas discretos en tiempo. Por una parte, la resolución numérica efectiva siempre pasa por una discretización temporal. Es pues natural considerar esquemas discretos en tiempo. Pero además, en muchas ocasiones la utilización de discretizaciones temporales es también un método para obtener soluciones para el modelo continuo.

En el marco de las EDP lineales son muchas las técnicas que se pueden utilizar para resolverlas: soluciones fundamentales, análisis de Fourier, separación de variables y métodos espectrales, semigrupos, . . . Sin embargo, las ecuaciones no-lineales son mucho más complejas y se dispone de menos métodos sistemáticos para resolverlas. En esta sección ilustraremos la posible utilización de métodos de discretización temporal en el caso modelo de una ecuación parabólica no-lineal que involucra al operador p -Laplaciano:

$$\begin{cases} u_t - (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (195)$$

A lo largo de esta sección supondremos que Ω es un abierto acotado y regular de \mathbb{R}^n y que $p \geq 2$, si bien el modelo tiene también sentido para $p \geq 1$, siendo $p = 1$ un caso límite. Pero, para evitar algunas dificultades técnicas adicionales, supondremos que $p \geq 2$.

Conviene observar que cuando $p = 2$, (195) se reduce a la ecuación del calor lineal para la que, como decíamos, disponemos de diversos métodos. El caso no-lineal, como veremos, es bastante más complejo.

Desde un punto de vista numérico, el modo más natural para abordar el problema es o bien mediante un método de Galerkin o a través de una discretización temporal. En esta sección analizaremos ambos métodos pero antes estudiaremos brevemente el problema elíptico subyacente.

8.1 El problema elíptico

Dado $f = f(x)$ consideramos el problema elíptico:

$$\begin{cases} -(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (196)$$

Su formulación variacional es

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \quad (197)$$

Para que esta formulación variacional tenga sentido basta que f pertenezca al dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Para ello es suficiente que $f \in L^q(\Omega)$ con $q > np / (np + p - 1)$.

Para obtener una solución débil consideramos el funcional

$$J : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (198)$$

tal que

$$J(v) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx - \int_{\Omega} f v dx. \quad (199)$$

El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo. Por otra parte, J es continuo, convexo y coercivo. Por tanto, el funcional J alcanza su mínimo en un punto $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Es fácil comprobar que u es una solución de (196) en el sentido de (197).

Por otra parte la solución débil es única, puesto que J es estrictamente convexo.

Otra manera de comprobar la unicidad es, como es habitual, suponer que hay dos soluciones u_1 y u_2 y definir $v = u_1 - u_2$. Entonces, v satisface

$$\begin{cases} -(|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2) = 0 & \text{en } \Omega \\ u_1 - u_2 = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (200)$$

o, lo que es lo mismo, su versión variacional

$$\int_{\Omega} [|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2] \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (201)$$

Tomando como función test $\varphi = u_1 - u_2 = v$ obtenemos

$$\int_{\Omega} [|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2] \cdot \nabla (u_1 - u_2) dx = 0. \quad (202)$$

Por otra parte, se tiene la desigualdad en \mathbb{R}^n :

$$(|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b) \cdot (a - b) \geq 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n, \quad (203)$$

de donde deducimos que, necesariamente,

$$(|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2) \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) = 0 \quad x \in \Omega. \quad (204)$$

Pero en realidad podemos decir más aún y garantizar que

$$(|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b) \cdot (a - b) > 0 \quad \text{si } a \neq b \quad (205)$$

lo que asegura, en virtud de (202), que

$$\nabla u_1 = \nabla u_2 \quad x \in \Omega. \quad (206)$$

Teniendo en cuenta que $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, deducimos entonces que $u_1 = u_2 \quad x \in \Omega$.

8.2 El método Galerkin

El método de Galerkin para aproximar la ecuación (195) se introduce del mismo modo que en el caso lineal. Introducimos una aproximación de $W_0^{1,p}(\Omega)$ mediante subespacios de dimensión finita V_h de elementos finitos P_1 a trozos y continuos. El lector interesado en los aspectos básicos del método de elementos finitos podrá consultar [36] o [?].

Suponemos que

$$\dim(V_h) = N_h, V_h = [e_1, \dots, e_{N_h}]. \quad (207)$$

Buscamos entonces aproximaciones de la solución de (195) tales que

$$u_h \in C([0, \infty); V_h) \quad (208)$$

de modo que

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j(t) e_j(x). \quad (209)$$

Con el objeto de introducir esta aproximación conviene previamente introducir la formulación variacional de (195):

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap L^p(0, \infty; W_0^{1,p}(\Omega)) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0, \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \int_{\Omega} u(x, t) \varphi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x) dx, t \rightarrow 0, \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{array} \right. \quad (210)$$

El espacio en el que buscamos la solución está inspirado en la estimación de energía para las soluciones de (195) que, formalmente, consiste en multiplicar la ecuación (195) por u , e integrar por partes en Ω . Se obtiene así:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2(x, t) dx = - \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx. \quad (211)$$

Integrando en tiempo obtenemos

$$\int_{\Omega} u^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx dt = \int_{\Omega} u_0^2(x) dx. \quad (212)$$

De esta estimación formal deducimos que, si el dato inicial $u_0 \in L^2(\Omega)$, cabe esperar que la solución verifique que $u \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$ y además $u \in L^p(0, \infty; W_0^{1,p}(\Omega))$.

A partir de (210) es fácil introducir una aproximación de Galerkin:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_h \in C([0, \infty); V_h) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_h \varphi dx + \int_{\Omega} |\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi dx = 0, \forall \varphi \in V_h \\ u_h(0) = u_{0,h}, \end{array} \right. \quad (213)$$

donde $u_{0,h}$ es una aproximación de u_0 en V_h que verifica

$$u_{0,h} \rightarrow u_0 \text{ en } L^2(\Omega). \quad (214)$$

Como es habitual en el marco de las aproximaciones de Galerkin, tenemos que resolver dos cuestiones. En primer lugar tenemos que probar que (213) admite una única solución u_h y en segundo que converge a una solución de (195).

Con el objeto de verificar si (213) admite una solución, escribimos esta formulación variacional como un sistema de N_h ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales con N_h incógnitas. En virtud de la estructura (209) y teniendo en cuenta que (213) se satisface para toda función test $\varphi \in V_h$ sí y sólo sí se cumple para toda función e_j , $j = 1, \dots, N_h$ de la base de V_h , deducimos que (213) equivale a

$$\begin{cases} MU' + F(U) = 0, & t > 0 \\ U(0) = U_{0,h}, \end{cases} \quad (215)$$

donde el vector columna $U = (u_1, \dots, u_{N_h})^t$, codifica las N_h incógnitas del sistema, $U_{0,h}$ representa del mismo modo el dato inicial $u_{0,h} \in V_h$, M es la matriz de masa del método de elementos finitos $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq N_h}$ con

$$m_{ij} = \int_{\Omega} e_i(x)e_j(x)dx, \quad (216)$$

y F es una función no-lineal que está definida del siguiente modo:

$$F(U) = (F_j(U))_{1 \leq j \leq N_h}, \quad (217)$$

donde

$$F_j(U) = \int_{\Omega} \left| \nabla \left(\sum_{k=1}^{N_h} u_{j_k} e_k(x) \right) \right|^{p-2} \nabla \left(\sum_{k=1}^{N_h} u_k e_k(x) \right) \cdot \nabla e_j(x) dx. \quad (218)$$

En el caso en que $p = 2$, $F(U) = RU$, donde R es la matriz de rigidez del método de elementos finitos.

Cuando $p \geq 2$, la función F es no-lineal y de clase C^1 de modo que (215) admite una única solución local. Con el objeto de probar que la solución es global precisamos de una estimación a priori. Aplicando de nuevo el método de energía que consiste en tomar en (213) la propia solución u_h como función test o multiplicar en (215) escalarmente con la propia incógnita U , obtenemos que (212) se satisface también para cada aproximación u_h . Deducimos pues por tanto que la solución de (213) está globalmente definida.

Esto proporciona también una cota uniforme sobre las soluciones aproximadas:

$$\frac{1}{2} \| u_h \|_{L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))}^2 + \| \nabla u_h \|_{L^p(\Omega \times (0, \infty))}^p \leq \frac{1}{2} \| u_{0,h} \|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall h > 0. \quad (219)$$

De esta estimación podemos deducir que, extrayendo subsucesiones,

$$\begin{cases} u_h \rightharpoonup u & \text{débil-* en } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \\ u_h \rightharpoonup u & \text{débil en } L^p(0, \infty; W_0^{1,p}(\Omega)). \end{cases} \quad (220)$$

Pero estas convergencias débiles no son suficientes para pasar al límite en (213) puesto que se trata de un problema no-lineal.

El paso al límite necesita de estimaciones adicionales. Con el objeto de obtenerlas conviene volver por un momento a la ecuación continua y comprobar qué otras estimaciones se cumplen. En primer lugar observamos que si u_1 y u_2 son soluciones de (195) multiplicando por $u_1 - u_2$ la ecuación que $u_1 - u_2$ satisface se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 dx + \int_{\Omega} (|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2) \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) dx = 0. \quad (221)$$

Utilizamos ahora la existencia de $c > 0$ tal que^{||}

$$(|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b) \cdot (a - b) \geq c |a - b|^p, \forall a, b \in \mathbb{R}^n. \quad (222)$$

Obtenemos así que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 dx + c \int_{\Omega} |\nabla (u_1 - u_2)|^p dx \leq 0. \quad (223)$$

Deducimos entonces que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_1(x, t) - u_2(x, t)|^2 dx + c \int_{\Omega \times (0, t)} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p dx ds \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_{1,0} - u_{2,0}|^2 dx. \quad (224)$$

De esta desigualdad deducimos que si (u_j) es una sucesión de soluciones de (195) tales que sus datos iniciales $(u_{j,0})$ constituyen una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$ entonces u_j es también una sucesión de Cauchy en $L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^p(0, \infty; W_0^{1,p}(\Omega))$.

Este argumento, aplicado en el contexto de las aproximaciones de Galerkin, permite probar que ∇u_h es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega \times (0, \infty))$ lo cual, en virtud de (220), proporciona la convergencia fuerte

$$\nabla u_h \longrightarrow \nabla u \text{ en } L^p(\Omega \times (0, \infty)), \quad (225)$$

que se precise para pasar al límite en la aproximación de Galerkin (213) y obtener en el límite la formulación variacional (210) de la ecuación (195).

Esto es rigurosamente cierto cuando los espacios de Galerkin V_h crecen a medida que h decrece. Esto no es así para una triangulación arbitraria en el contexto de los elementos finitos, pero ocurre efectivamente cuando, a medida que h decrece, el nuevo espacio V_h se obtiene como el correspondiente a un mallado proveniente del anterior por refinamiento.

Hemos comprobado por tanto que el método de Galerkin proporciona una manera de construir soluciones de (195).

^{||}La demostración de esta desigualdad se deja como ejercicio al lector.

8.3 Discretización temporal

Dado un paso temporal $\Delta t > 0$, destinado a tender a cero, nos proponemos obtener las soluciones de (195) como límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ de soluciones de sistemas discretos en tiempo.

En lo sucesivo, con el objeto de simplificar la notación, denotamos mediante A_p el operador p -Laplaciano, de modo que

$$A_p(u) = - (|\nabla u|^{p-2} \nabla u). \quad (226)$$

A la hora de discretizar (195) tenemos dos opciones básicas:

- El esquema de Euler explícito:

$$\begin{cases} u^{k+1} + \Delta t A_p(u^k) = u^k, & \text{en } \Omega, \\ u^{k+1} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, k \geq 0, \\ u^0 = u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (227)$$

- El esquema de Euler implícito:

$$\begin{cases} u^{k+1} + \Delta t A_p(u^{k+1}) = u^k, & \text{en } \Omega, \\ u^{k+1} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, k \geq 0 \\ u^0 = u_0, & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (228)$$

En ambos casos u^k representa una aproximación de la solución de (195) en el instante $t = k\Delta t$. También en ambos esquemas el dato inicial u_0 del sistema (195) se toma como valor inicial de la iteración para $k = 0$.

La ventaja principal del esquema explícito (227) frente al implícito (228) es que los sucesivos valores de u^k se obtienen sin necesidad de resolver ninguna ecuación, “leyendo” su valor a partir de los del paso anterior. Así, de (227) tenemos

$$u^{k+1} = u^k - \Delta t A_p(u^k) = B_{\Delta t}(u^k). \quad (229)$$

Iterando en esta aplicación no-lineal $B_{\Delta t}$, podemos escribir el valor de la solución discreta a partir del dato inicial de manera explícita:

$$u^k = (B_{\Delta t})^k(u_0). \quad (230)$$

Conviene sin embargo señalar que la expresión (230), además de ser fuertemente no-lineal, involucra derivadas del dato inicial u_0 del orden de $2k$. Teniendo en cuenta que el número de pasos k necesarios para aproximar el valor de la solución en un instante fijo T tiende a infinito cuando $\Delta t \rightarrow 0$, este método sólo puede ser útil cuando el dato inicial u_0 es de clase C^∞ . Pero incluso en este caso la convergencia del método no está garantizada.

En este contexto es mucho más natural utilizar el método implícito que, como sabemos, en el marco de las EDOs es incondicionalmente estable y convergente. Ahora bien, la

aplicación del esquema implícito (228) exige, en cada paso, resolver el problema elíptico no-lineal:

$$\begin{cases} u^{k+1} + \Delta t A_p(u^{k+1}) = u^k, & \text{en } \Omega, \\ u^{k+1} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (231)$$

La solución de este problema puede obtenerse por técnicas análogas a las empleadas en la sección 8.1. Más concretamente, para probar la existencia de la solución de (231) basta minimizar el funcional

$$J_k(v) = \frac{\Delta t}{p} \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 dx - \int_{\Omega} u^k v dx, \quad (232)$$

en el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$. La unicidad de la solución se demuestra por técnicas análogas a las empleadas en la sección 8.1.

Además, el método de energía proporciona estimaciones inmediatas. En efecto, multiplicando en (231) por u^{k+1} e integrando en Ω obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u^{k+1}|^2 dx + \Delta t \int_{\Omega} |\nabla u^{k+1}|^p dx &= \int_{\Omega} u^{k+1} u^k dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |u^{k+1}|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u^k|^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (233)$$

de donde se deduce que, en particular,

$$\left\| u^{k+1} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| u^k \right\|_{L^2(\Omega)}. \quad (234)$$

Iterando esta desigualdad llegamos con facilidad a la cota

$$\max_k \left\| u^k \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad (235)$$

independiente de Δt .

Pero de (233) se deduce también que

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_k \int_{\Omega} |\nabla u^{k+1}|^p dx &\leq \sum_k \left\| u^{k+1} \right\|_{L^2(\Omega)} \left(\left\| u^k \right\|_{L^2(\Omega)} - \left\| u^{k+1} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \sum_k \left(\left\| u^k \right\|_{L^2(\Omega)} - \left\| u^{k+1} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (236)$$

Las estimaciones (235) y (236) son obviamente los análogos discretos de la estimación de energía.

A partir de la solución discreta $\{u^k\}_{k \geq 0}$ podemos construir una función continua $u_{\Delta t}(x, t)$ que en cada intervalo temporal de la forma $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ tome el valor de $u^k(x)$. Obtenemos así una familia $\{u_{\Delta t}\}_{\Delta t > 0}$ de funciones continuas, acotadas en el espacio $L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^p(0, \infty; W_0^{1,p}(\Omega))$. Extrayendo subsucesiones podemos pasar

al límite débilmente en la sucesión $u_{\Delta t}$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y obtener una función límite $u(x, t)$. El problema que persiste es probar que este límite es solución de la ecuación no-lineal (195) o, si se prefiere, que verifica la formulación débil (210). Nuevamente, a causa del carácter no-lineal de los problemas considerados, esto no es del todo inmediato.

Con el objeto de poder garantizar que el límite u es solución de (195) o (210) necesitamos probar la convergencia fuerte de $\nabla u_{\Delta t}$ en $L^1_{loc}(0, \infty; L^{p-1}(\Omega))$. Para ello, el ingrediente clave es la obtención de estimaciones de orden superior. Con el objeto de entender cómo se pueden obtener dichas estimaciones volvemos al problema continuo. Multiplicando en (195) por u_t e integrando en Ω obtenemos

$$\int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u_t dx = 0.$$

Por otra parte

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u_t dx = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx.$$

Obtenemos por tanto la identidad

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right] = - \int_{\Omega} u_t^2 dx = - \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u)^2 dx \quad (237)$$

que, integrada en t , proporciona

$$\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^p dx + \int_0^t \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u)^2 dx ds = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_0(x)|^p dx, \quad (238)$$

siempre y cuando $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Deducimos así una estimación para la solución continua en $L^\infty(0, \infty; W_0^{1,p}(\Omega))$, además de una cota de $(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ en $L^2(\Omega \times (0, \infty))$.

Esta estimación puede reproducirse en el marco discreto. Multiplicando en (231) por $(u^{k+1} - u^k) / \Delta t$ deducimos que

$$\int_{\Omega} \left| \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} \right|^2 dx + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (|\nabla u^{k+1}|^{p-2} \nabla u^{k+1}) \cdot (u^{k+1} - u^k) dx = 0,$$

que, tras la integración por partes, proporciona

$$\int_{\Omega} \left| \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} \right|^2 dx + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} |\nabla u^{k+1}|^p dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} |\nabla u^{k+1}|^{p-2} \nabla u^{k+1} \cdot \nabla u^k dx = 0. \quad (239)$$

De esta expresión es fácil deducir que

$$\int_{\Omega} |\nabla u^{k+1}|^p dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u^k|^p dx, \quad (240)$$

que, iterándola, proporciona la cota

$$\| \nabla u^k \|_{L^p(\Omega)} \leq \| \nabla u_0 \|_{L^p(\Omega)}, \forall k \geq 0, \quad (241)$$

independiente de Δt .

Una vez que ya disponemos de esta cota es fácil concluir que

$$\Delta t \sum_k \int_{\Omega} \left| \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} \right|^2 dx \leq C \| \nabla u_0 \|_{L^p(\Omega)}^p. \quad (242)$$

Obtenemos así un análogo discreto de la estimación de energía de segundo orden (238).

Esta estimación permite obtener la convergencia fuerte de $\nabla u_{\Delta t}$ necesaria para probar que el límite u es solución de la ecuación (195) si bien en esta sección omitiremos los detalles.

8.4 Conclusión

En esta sección hemos visto cómo la discretización temporal implícita de Euler y la aproximación de Galerkin continua en tiempo son dos métodos de aproximación para ecuaciones parabólicas no-lineales de la forma (195).

El hecho de que el esquema discreto en tiempo sea una manera natural de aproximar la EDP de evolución es lo que nos ha motivado en la sección anterior a introducir los esquemas de “splitting” o de descomposición en ecuaciones discretas en tiempo.

Los desarrollos de esta sección, en el marco de la ecuación del calor p -Laplaciana (195), pueden también hacerse, con argumentos análogos, para otros modelos como son las ecuaciones de Navier-Stokes $2 - d$ o la ecuación de Burgers viscosa $1 - d$.

Como el sistema (195) es autónomo y posee soluciones únicas, es el generador de un semigrupo que, por analogía con el caso lineal, denotamos $S(t)$. Así la solución u de (195) en el instante t se puede denotar como $u(t) = S(t)u_0$, donde $S(t)$ es la aplicación no-lineal solución. Esta familia de aplicaciones $\{S(t)\}_{t>0}$ satisface las dos relaciones

$$\begin{cases} S(0) = Id, \\ S(t) \circ S(s) = S(t + s), \end{cases}$$

por lo que se dice semigrupo.

Los desarrollos de esta sección están en la base de la teoría de semigrupos no-lineales en el marco de la cual (195) y los demás modelos mencionados no son más que ejemplos concretos que pueden abordarse mediante esta técnica sistemática.

References

- [1] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary, *SIAM J. Cont. Optim.*, **30** (1992), 1024-1065.

-
- [2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.
- [3] C. Castro and E. Zuazua, Unique continuation and control for the heat equation from an oscillating lower dimensional manifold, *SIAM J. Cont. Optim.*, 43 (4) (2005), 1400-1434.
- [4] A. Chorin & J. E. Marsden, (1993), *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Third edition. Texts in Applied Mathematics, 4. Springer-Verlag, New York.
- [5] G. C. Cohen, (2002). *Higher-order numerical methods for transient wave equations*. Scientific Computation. Springer-Verlag, Berlin.
- [6] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Wiley Interscience, 1962.
- [7] S. Cox and E. Zuazua, The rate at which energy decays in the string damped at one end, *Indiana Univ. Math. J.*, 44 (2) (1995), 545-573.
- [8] B. Dehman, G. Lebeau and E. Zuazua, Stabilization and Control of the semilinear subcritical wave equation, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, (4) 36 (2003), no. 4, 525-551.
- [9] J. Duoandikoetxea and E. Zuazua, Moments, masses de Dirac et décomposition de fonctions, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, 315 (6). 693-698. 1992.
- [10] G. Duro and E. Zuazua, Large time behavior for convection-diffusion equations in R^N with periodic coefficients, *Journal Diff. Equations*, 167(2)(2000), 275-315.
- [11] G. Duro and E. Zuazua, Large time behavior for convection-diffusion equations in R^N with asymptotically constant diffusion, *Communications in PDE*, 24 (7& 8) (1999), 1283-1340.
- [12] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.19, AMS, 1998.
- [13] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton, New Jersey, 1976.
- [14] R. Glowinski (1992). "Ensuring well-posedness by analogy; Stokes problem and boundary control of the wave equations". *J. Compt. Phys.*, 103(2), 189-221.
- [15] A. Iserles, *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 1997.
- [16] S. Jaffard, M. Tucsnak and E. Zuazua, Singular internal stabilization of the wave equation *Journal of Differential equations*, 145 (1) (1998), 184-215.
- [17] F. John, *Partial differential Equations*, (4. ed), Springer, 1982.

- [18] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization: the multiplier method*, Masson & John Wiley, RAM 36, 1994.
- [19] R. J. LeVeque, (1992). *Numerical methods for conservation laws*. Second edition. Lectures in Mathematics ETH Zurich. Birkhuser Verlag, Basel, 1992.
- [20] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations de systèmes distribués. Tomes 1 & 2*. RMA **8** & **9**, Paris, 1988.
- [21] F. Macia and E. Zuazua, On the lack of controllability of wave equations: a gaussian beam approach, *Asymptotic Analysis*, **32** (1) (2002), 1-26.
- [22] J. Ortega and E. Zuazua, Large time behavior in R^N for linear parabolic equations with periodic coefficients, *Asymptotic Analysis*, **22** (1)(2000), 51-85.
- [23] ÊA. Quarteroni y A. Valli, (1998). *Numerical approximation of Partial differential Equations*, Springer, Springer Series in Computational Mathematics, 23.
- [24] ÊA. Quarteroni y A. Valli, (1999). *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Oxford University Press, Oxford.
- [25] F. Rellich, Darstellung der Eigenwerte von $\Delta u + \lambda u = 0$ durch ein Randintegral, *Math Z.*, **46** (1940), 635-636.
- [26] J. A. Sethian, (2002), *Level set methods and fast marching methods*. Cambridge Monographs in Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press.
- [27] J. L. Vázquez, (2003) *Fundamentos Matemáticos de las Mecánica de Fluidos*. http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/jvazquez/mex10chap.ps
- [28] J. L. Vázquez, Asymptotic behaviour for the Porous Medium Equation in the whole space, Ph. D. Course, UAM 1996/97. See UAM address <http://www.adi.uam.es/~jvazquez>
- [29] J.L. Vázquez and E. Zuazua, Complexity of large time behavior of evolution equations with bounded data, *Chinese Annals of Mathematics, Ser. B*, **23** (2) (2002), 293-310.
- [30] L. Véron, Coercivité et propriétés régularisantes des semi-groupes non linéaires dans les espaces de Banach. *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **1979** 1, 171-200.
- [31] R. Vichnevetsky and J. B. Bowles, (1982). *Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations*. SIAM Studies in Applied Mathematics, **5**, SIAM, Philadelphia, Pa.
- [32] G. B. Whitham, (1999), *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

-
- [33] R. M. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press, 1980.
- [34] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping, *Communications in PDE*. **15** (2) (1990), 205-235.
- [35] E. Zuazua, *Ecuaciones en Derivadas Parciales*.
http://www.bcamath.org/documentos_public/archivos/personal/comites/1_ecudepa.pdf
- [36] Zuazua, E. (2003). *Introducción al Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales de Evolución*.
http://www.bcamath.org/documentos_public/archivos/personal/comites/1_anedpde2.pdf
- [37] Zuazua, E. (2009). *Métodos Numéricos de resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales*.
http://www.bcamath.org/documentos_public/archivos/personal/comites/notas-05_065-complete.pdf