EL TABLERO DE GALTON

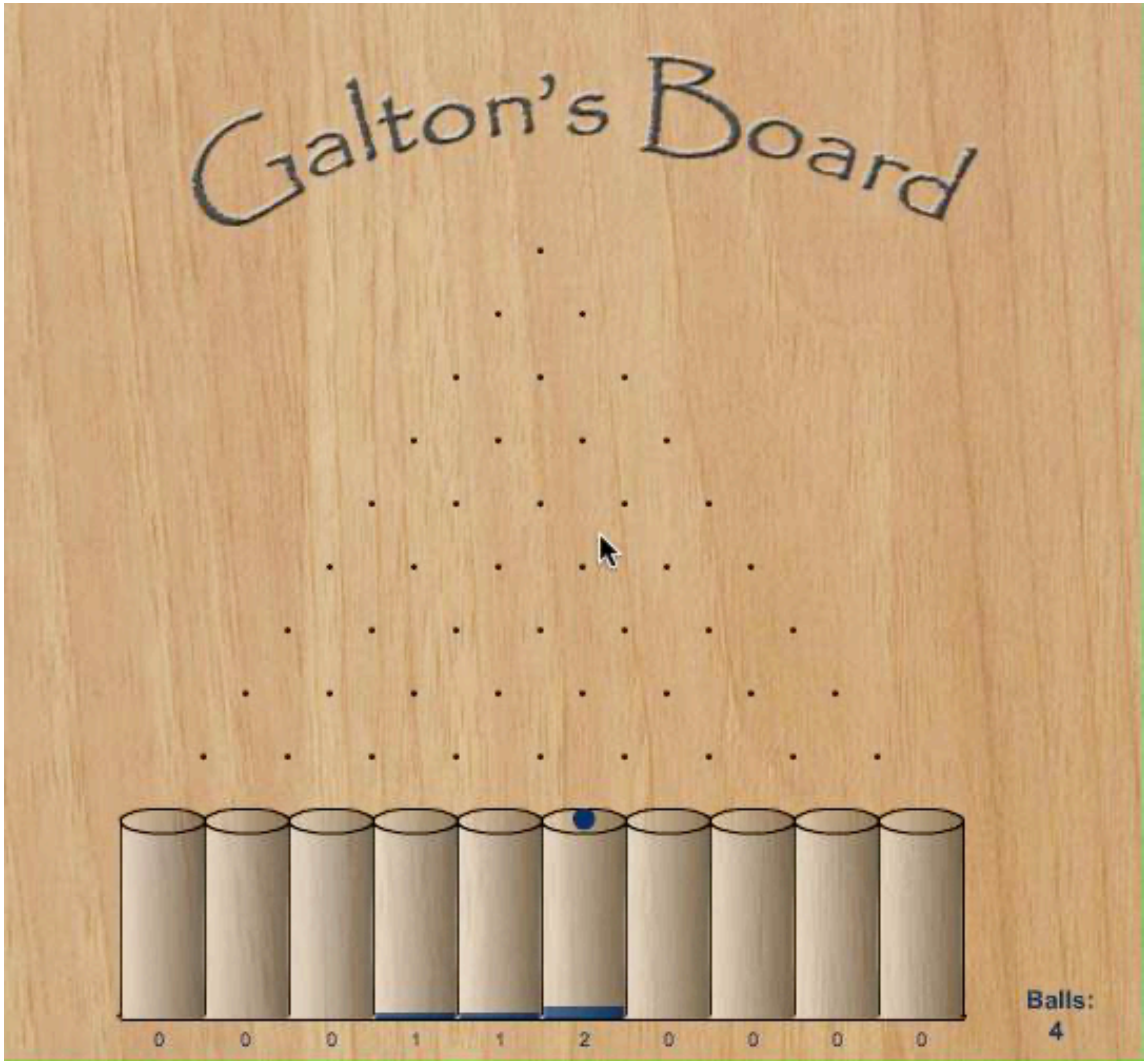
Izaskun Bayo (UPV/EHU)
Ainhoa Vega (UPV/EHU)
Luis Vega (UPV/EHU-BCAM)

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

bcam
basque center for applied mathematics


Galton's Board
0 0 0 1 1 2 0 0 0 0
Balls:
4

Quincunx o tablero de Galton

- Galton diseñó este mecanismo al que bautizó con el nombre de Quincunx, también conocido como tablero de Galton, para comprobar que lo que se denomina regresión a la media surgía por efectos aleatorios.

- ***Regression towards mediocrity in hereditary stature*. (Galton, 1886)**. *The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland*.

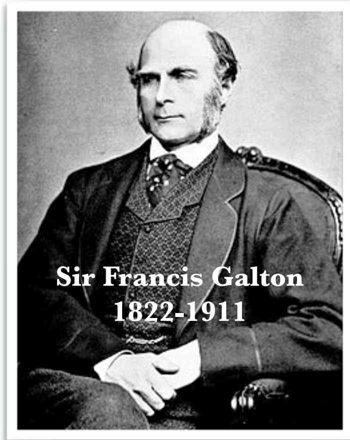
"Los descendientes de progenitores excepcionales son, en promedio, menos excepcionales que los progenitores, y más parecidos a sus ancestros más distantes."

Sobre Galton

Sir Francis Galton (1822-1911)

Antropólogo, meteorólogo, estadístico, ...

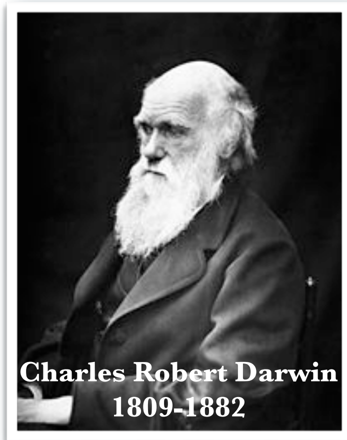
Un hombre de la época victoriana que trabajó en muy distintas áreas como la psicología, geografía, biología, estadística, ..., dando lugar incluso a la creación de nuevas disciplinas.



Todo lo cuantificaba

- Creo un laboratorio antropométrico en Londres en el que recogió medidas biológicas de muy diverso tipo: alturas, pesos, huesos, ...
- Llevo a cabo un estudio para medir la eficacia de la oración, llegando a la conclusión de que no guardaba relación con la longevidad. (http://www.abelard.org/galton/galton.htm#prayer)

Primo de



Quincunx o tablero de Galton

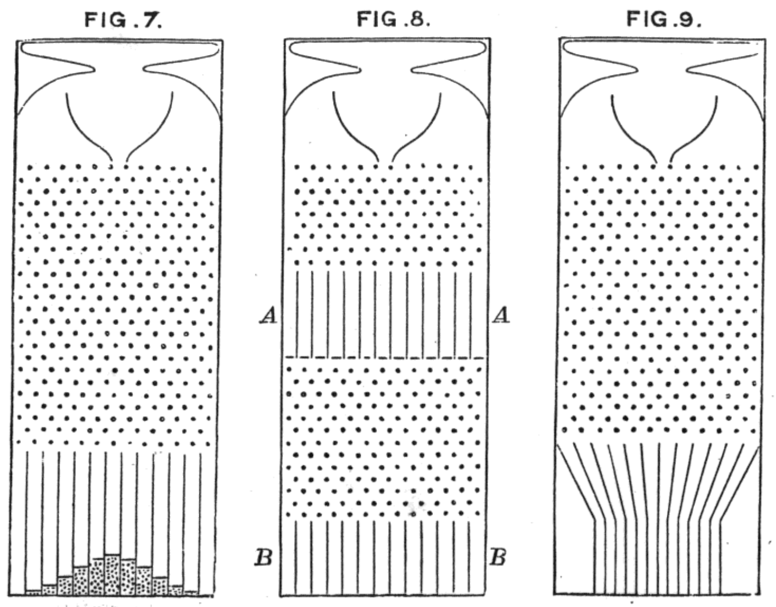
Tablero vertical con varias filas de clavos intercalados sucesivamente.

Se dejan caer bolas desde arriba, que al chocar con un clavo pueden ir a la derecha o a la izquierda con la misma probabilidad.

La bola continua de esta manera hasta que llega al fondo.

Las bolas se recogen en unos contenedores que tienen la anchura del diámetro de las bolas.

Cuando se deja caer una bola no se sabe donde terminará. Pero cuando se deja caer un gran número de bolas, se puede predecir con notable precisión donde caerá la mayoría de ellas.



El tablero de Galton, tal y como fue diseñado por Francis Galton

De hecho podemos predecir la forma de la curva que dibujarán todas las bolas.

Para qué puede servir el tablero de Galton

Galton diseñó este mecanismo al que bautizó con el nombre de Quincunx, también conocido como tablero de Galton, para poder comprobar que lo que se denomina regresión a la media surgía por efectos aleatorios.

El tablero de Galton crea una serie de sucesos perfectamente aleatorios.

- El tablero de Galton sirve como modelo para entender decisiones binarias múltiples.
- Sirve para entender la Ley de los Grandes Números, que describe el comportamiento del promedio de una sucesión de variables aleatorias conforme aumenta su número de ensayos.
- Con el tablero de Galton se puede demostrar el Teorema Central del Límite, en concreto se puede demostrar que la distribución binomial tiende a la distribución normal.

Galton y la Estadística
Regresión a la media

- La regresión a la media es la tendencia de una medición extrema a presentarse más cercana a la media en una segunda medición.
- Galton utilizó el término *reversion* al hablar de guisantes en 1877, y *regression* al referirse a la estatura de humanos en 1885.

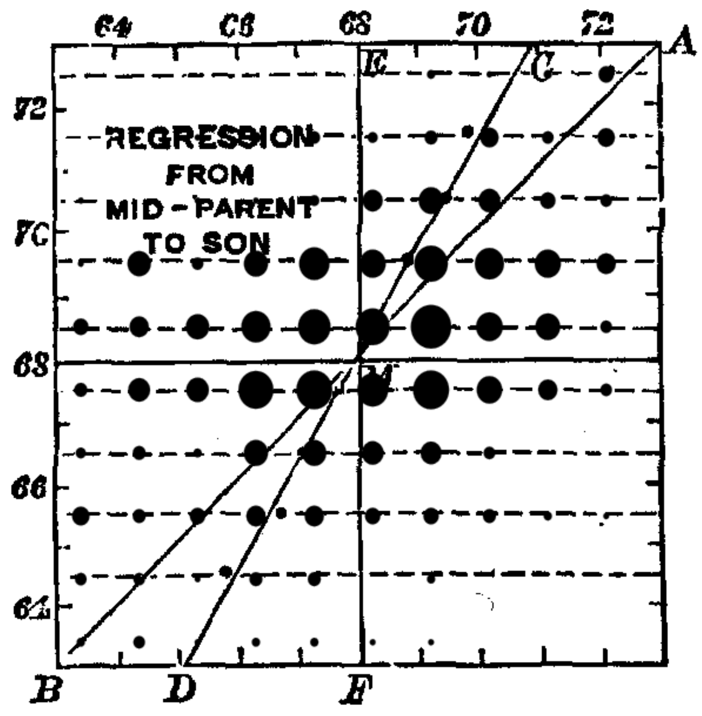
- Históricamente el nombre de modelos de regresión se debe a los estudios de Galton en biología. Galton, al estudiar la relación entre las estaturas de los hijos (Y) con la de sus padres (X), se dio cuenta que los hijos de padres altos son más altos que la media pero no tanto como sus padres, y los hijos de padres bajos, en general, son más bajos que la media pero no tanto como sus padres, es decir, que la altura de los hijos tiende a regresar a la media, de ahí el nombre de regresión.

Galton y la Estadística

Recta de Regresión y Correlación

- Recta de regresión
- En 1888 introduce el concepto de correlación, desarrollado posteriormente por Pearson y Sperman. La correlación mide el grado de asociación o dependencia entre dos variables.
- Primer autor que utilizó métodos estadísticos en Psicología.

FIG. 10.



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galton-height-regress.png
Based on Galton's original 1889 graph in "Natural Inheritance" page 96. Circles with sizes proportional to the data from table 11 (page 208) have been added.

Galton y la Estadística

Proceso de Galton-Watson

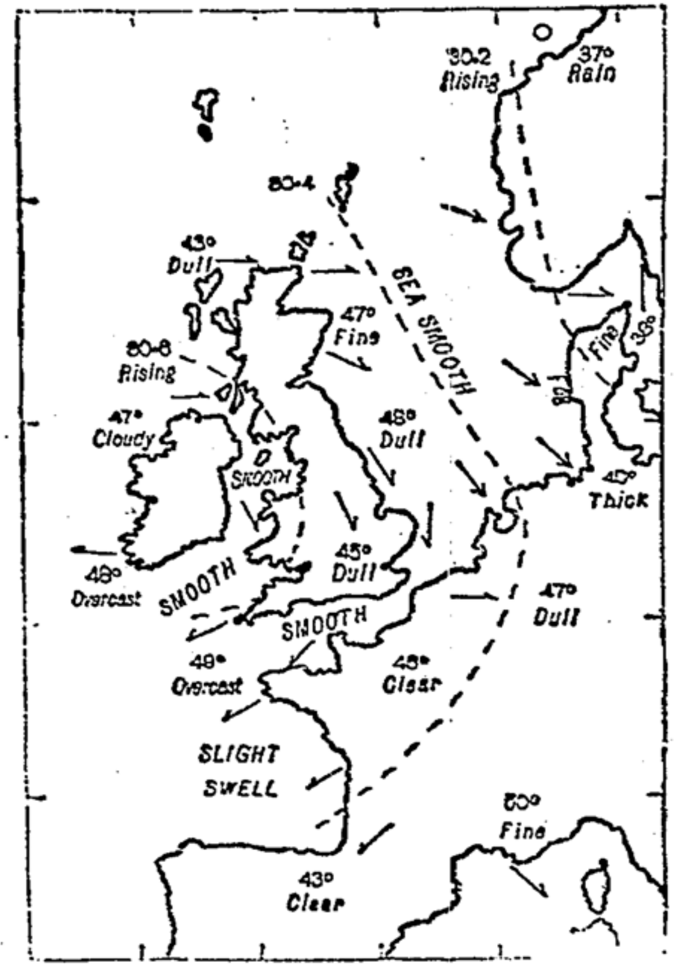
El proceso Galton-Watson, también conocido como proceso Bienaymé-Galton-Watson es un proceso estocástico utilizado para modelizar el desarrollo de una población de individuos autorreplicantes.

Tiene su origen en la investigación estocástica sobre la extinción de los apellidos aristocráticos, algo que preocupa mucho a la sociedad victoriana.

Se emplea en biología (al transmitirse el apellido de padre a hijos y no de madre a hijos, este proceso puede servir para describir en genética cualquier proceso que tenga que ver con la transmisión del cromosoma Y) y en multitud de disciplinas, como teoría de colas, propagación de virus informáticos y epidemiología, física nuclear (reacciones en cadena), filología, ...

Galton y la meteorología

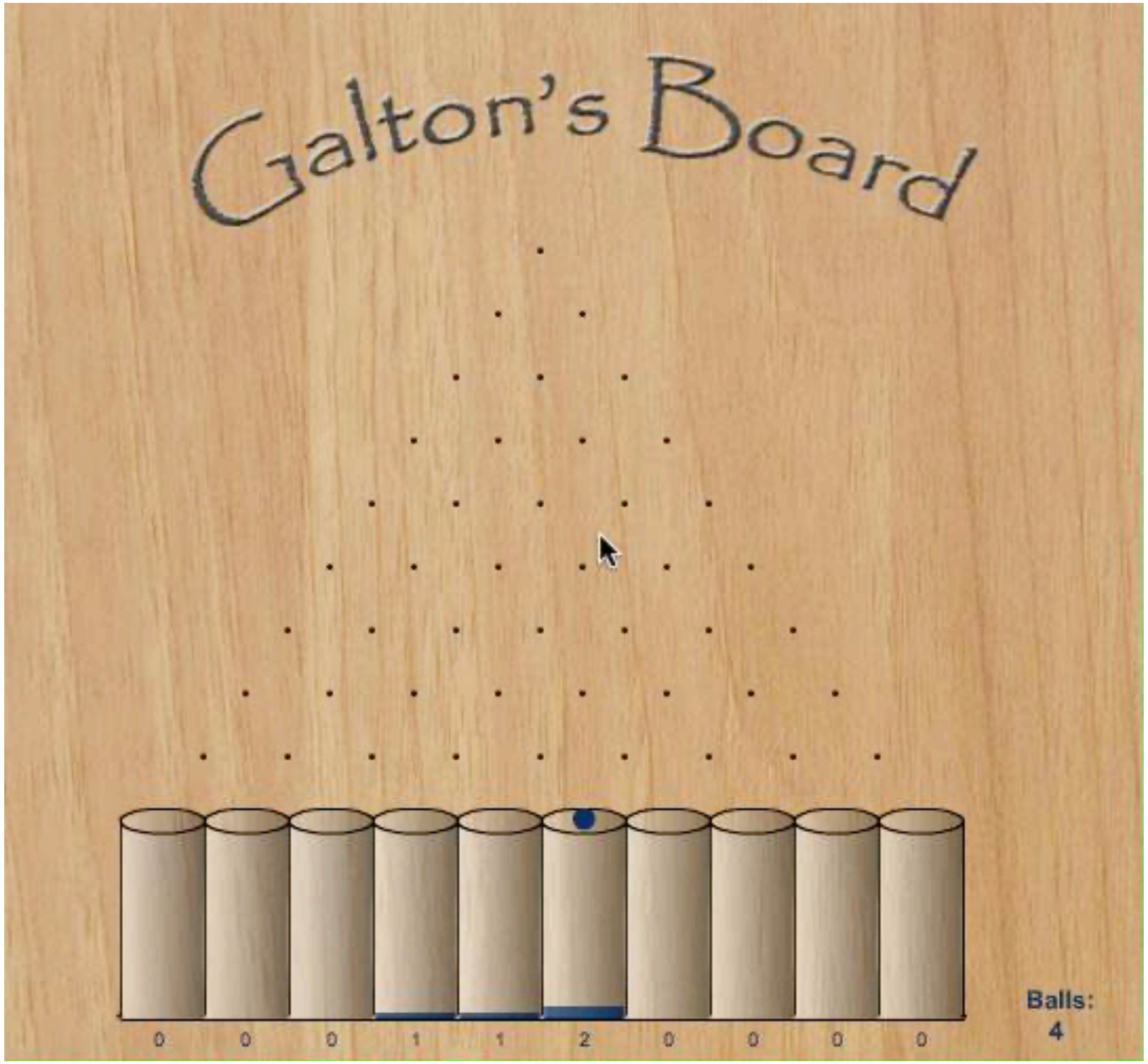
WEATHER CHART, MARCH 31, 1875.



The dotted lines indicate the gradations of barometric pressure The variations of the temperature are marked by figures, the state of the sea and sky by descriptive words, and the direction of the wind by arrows—barbed and feathered according to its force. ⊙ denotes calm.

- Acuñó el término anticiclón.
- El primero en utilizar los mapas del tiempo utilizando isobaras.

Primer mapa del tiempo publicado en The Times, el 1 de abril de 1875, mostrando el tiempo del día anterior


Galton's Board
0 0 0 1 1 2 0 0 0 0
Balls:
4

El tablero de Galton y el triángulo de Tartaglia o de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & 1 & & & & & & & {\color{blue}2^0} = (1+1)^0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & & {\color{blue}2^1} = (1+1)^1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & {\color{blue}2^2} = (1+1)^2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & {\color{blue}2^3} = (1+1)^3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & {\color{blue}2^4} = (1+1)^4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & {\color{blue}2^5} = (1+1)^5
\end{array}
$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

El tablero de Galton y el triángulo de Tartaglia o de Pascal

1 $\quad 2^0 = (1+1)^0$

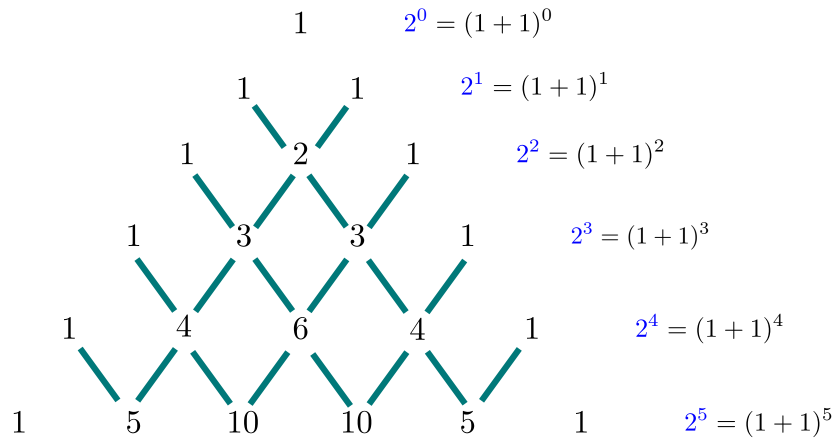
1 1 $\quad 2^1 = (1+1)^1$

1 2 1 $\quad 2^2 = (1+1)^2$

1 3 3 1 $\quad 2^3 = (1+1)^3$

1 4 6 4 1 $\quad 2^4 = (1+1)^4$

1 5 10 10 5 1 $\quad 2^5 = (1+1)^5$



- $f(n,k) = f(n-1,k-1) + f(n-1,k+1)$
- $\dfrac{f(n,k)}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}\Big[f(n-1,k-1) + f(n-1,k+1)\Big]$
- $P(n,k) = \dfrac{1}{2}\Big[P(n-1,k-1) + P(n-1,k+1)\Big]$
- $P(n,k) - P(n-1,k) = \dfrac{1}{2}\Big[P(n-1,k-1) - 2P(n-1,k) + P(n-1,k+1)\Big]$

$$P(n,k) \quad \to \quad P(t,x)$$

$t =$ **tiempo**

$x =$ **espacio**

$$\frac{d}{dt}P = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}P$$

$$= \frac{1}{2}\Delta P$$

¡¡ECUACIÓN DEL CALOR!!

Crecimiento exponencial

$$\left.\begin{aligned} P' &= aP \\ P(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad P(t) = e^{at}$$

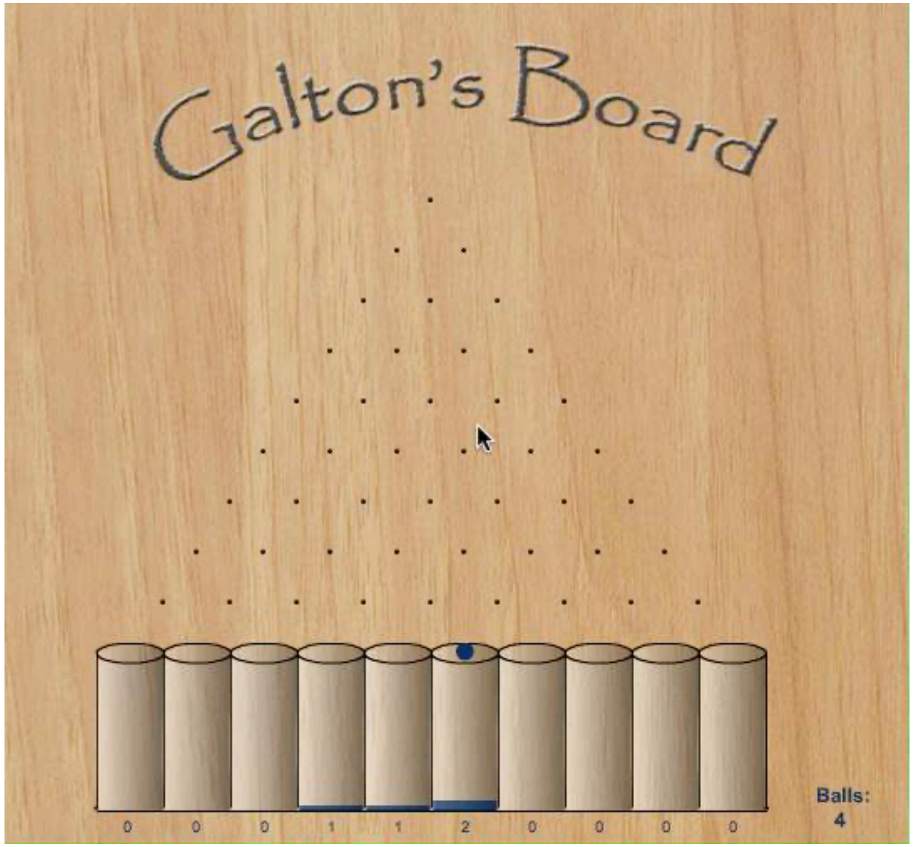
$$\Delta \to -2\pi x^2$$

$$P(1,x) = e^{-\pi x^2}$$

Campana de Gauss

Dos observaciones

- El comportamiento humano es impredecible.
- Siempre hay alguien que se sale de la norma.



¿Podemos predecir el recorrido de una bola conociendo la distribución de todas las anteriores?

Siempre hay alguien que se sale de la norma

- Los sucesos extraños siempre tienen que ocurrir.
- $\Delta \to -2\pi x^2$ (Mecánica Cuántica)
- Principio de incertidumbre.
- Teorema de Hardy.

Conclusiones

... it may be appropiate to quote a statement of Poincaré, who said (partly in jest no doubt) that there must be something mysterious about the normal law since mathematicians think it is a law of nature whereas physicists are convinced that it is a mathematical theorem.

Statistical Independence in Probability

Mark Kac, 1959

"Statisticians are at the fundamental core of every endeavor," Jewell says. Of all the data currently stored, he points out, an estimated 90% was created in the last two years.

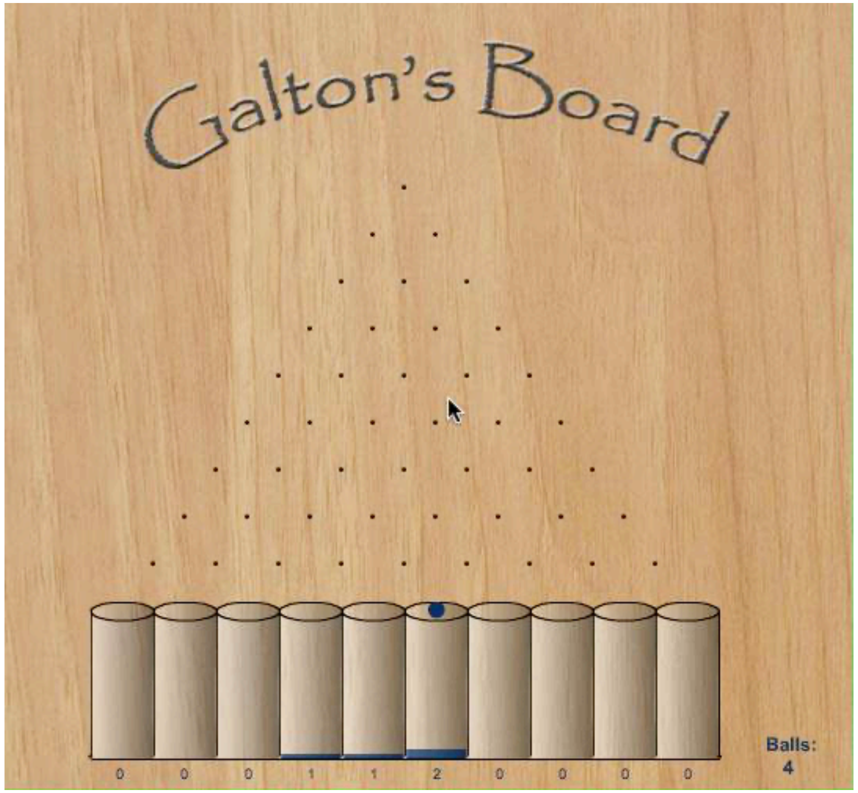
If you want to solve 21st-century problems, Jewell says, "you can't use 20th-century statistics."

MBI Celebrates the Future of Biomathematics
(SIAM NEWS, 1 abril 2013)

bien !!!

Estudiad Probabilidad y Estadística.

Os ahorrará muchos problemas.



ESKERRIK ASKO