# Estrategia de Refinamientos Automáticos $hp$ Integrada con un Resolvedor de Dos Mallas: Aplicaciones al Electromagnetismo


**David Pardo Zubiaur**

**Supervisor: Leszek Demkowicz**

**Equipo: L. Demkowicz, D. Pardo, D. Xue, J. Kurtz, M. Paszynski, Ch. Larson**

**Colaboradores: L.E. García Castillo, W. Rachowicz, A. Zdunek, M. Ainsworth**



**III Encuentro Ibérico de Electromagnetismo Computacional**

**16 de Diciembre 2003**



Institute for Computational Engineering and Sciences (ICES)
Universidad de Tejas en Austin

# Estrategia de Refinamientos Automáticos $hp$ Integrada con un Resolvedor de Dos Mallas: Aplicaciones al Electromagnetismo


**David Pardo Zubiaur**

**Supervisor: Leszek Demkowicz**

**Equipo: L. Demkowicz, D. Pardo, D. Xue, J. Kurtz, M. Paszynski, Ch. Larson**

**Colaboradores: L.E. García Castillo, W. Rachowicz, A. Zdunek, M. Ainsworth**


**Universidad Politécnica de Valencia**

**17 de Diciembre 2003**


Institute for Computational Engineering and Sciences (ICES)
Universidad de Tejas en Austin

# Estrategia de Refinamientos Automáticos $hp$ Integrada con un Resolvedor de Dos Mallas: Aplicaciones al Electromagnetismo


**David Pardo Zubiaur**

**Supervisor: Leszek Demkowicz**

**Equipo: L. Demkowicz, D. Pardo, D. Xue, J. Kurtz, M. Paszynski, Ch. Larson**

**Colaboradores: L.E. García Castillo, W. Rachowicz, A. Zdunek, M. Ainsworth**


**Universidad Carlos III de Madrid**

**18 de Diciembre 2003**


**Institute for Computational Engineering and Sciences (ICES)**
**Universidad de Tejas en Austin**

# Estrategia de Refinamientos Automáticos $hp$ Integrada con un Resolvedor de Dos Mallas: Aplicaciones al Electromagnetismo


**David Pardo Zubiaur**

**Supervisor: Leszek Demkowicz**

**Equipo: L. Demkowicz, D. Pardo, D. Xue, J. Kurtz, M. Paszynski, Ch. Larson**

**Colaboradores: L.E. García Castillo, W. Rachowicz, A. Zdunek, M. Ainsworth**

**Universidad Autónoma de Madrid**

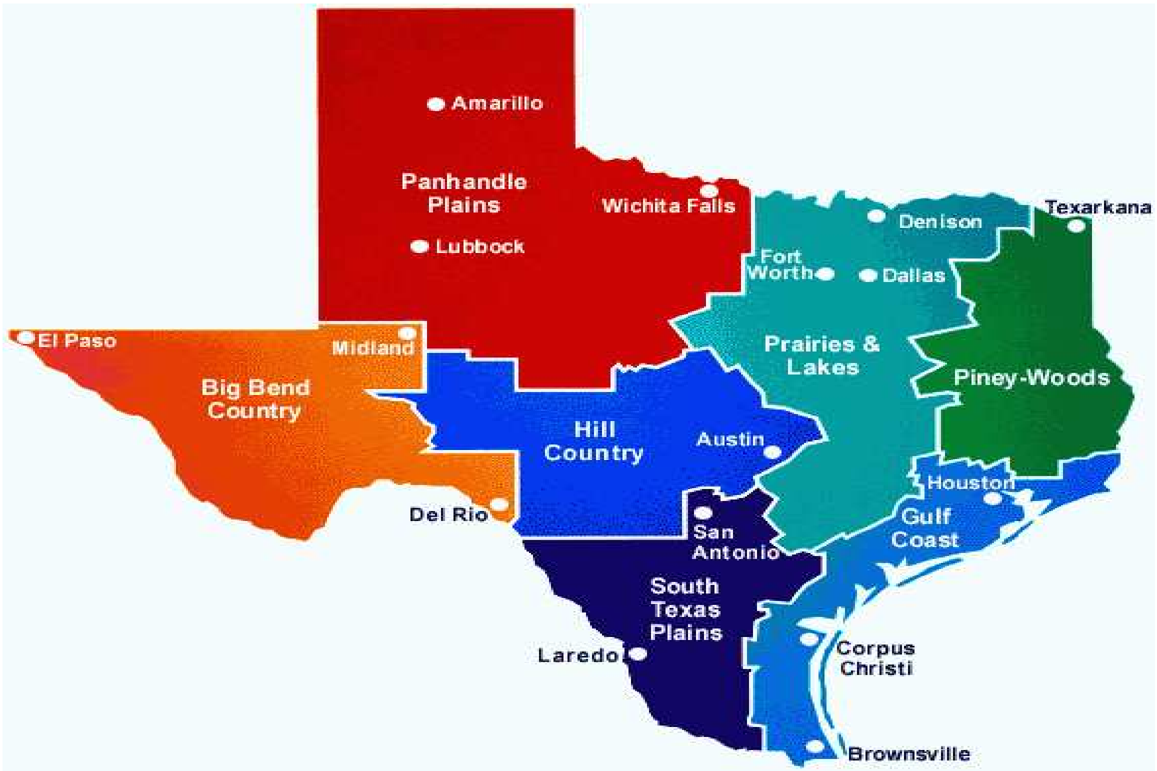

**19 de Diciembre 2003**


**Institute for Computational Engineering and Sciences (ICES)**
**Universidad de Tejas en Austin**

# TABLA DE CONTENIDOS

# 1. UNIVERSIDAD DE TEJAS EN AUSTIN

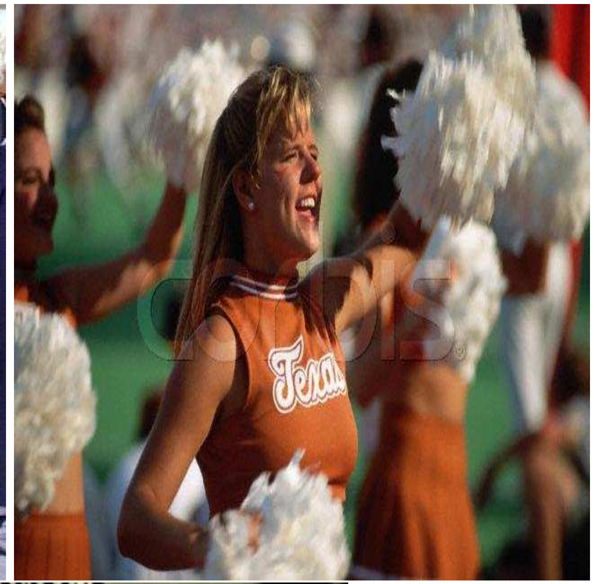
## TEJAS




**Everything is bigger in Texas**

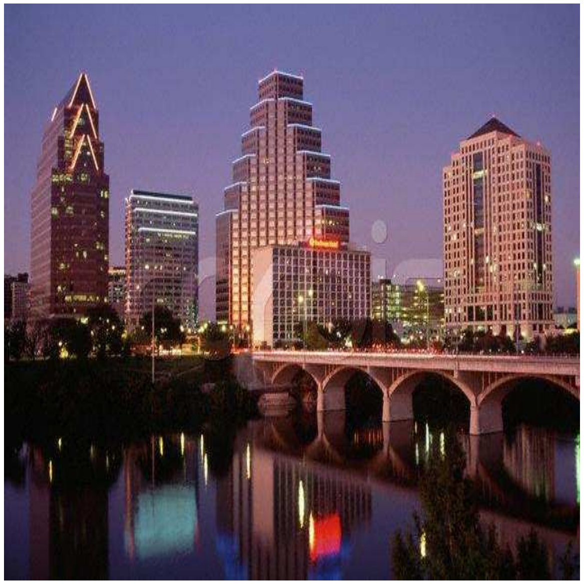
# 1. UNIVERSIDAD DE TEJAS EN AUSTIN

## TEJAS


# 1. UNIVERSIDAD DE TEJAS EN AUSTIN

## AUSTIN



# 1. UNIVERSIDAD DE TEJAS EN AUSTIN

## Universidad de Tejas en Austin

# 1. UNIVERSIDAD DE TEJAS EN AUSTIN

## Universidad de Tejas en Austin

# 1. UNIVERSIDAD DE TEJAS EN AUSTIN

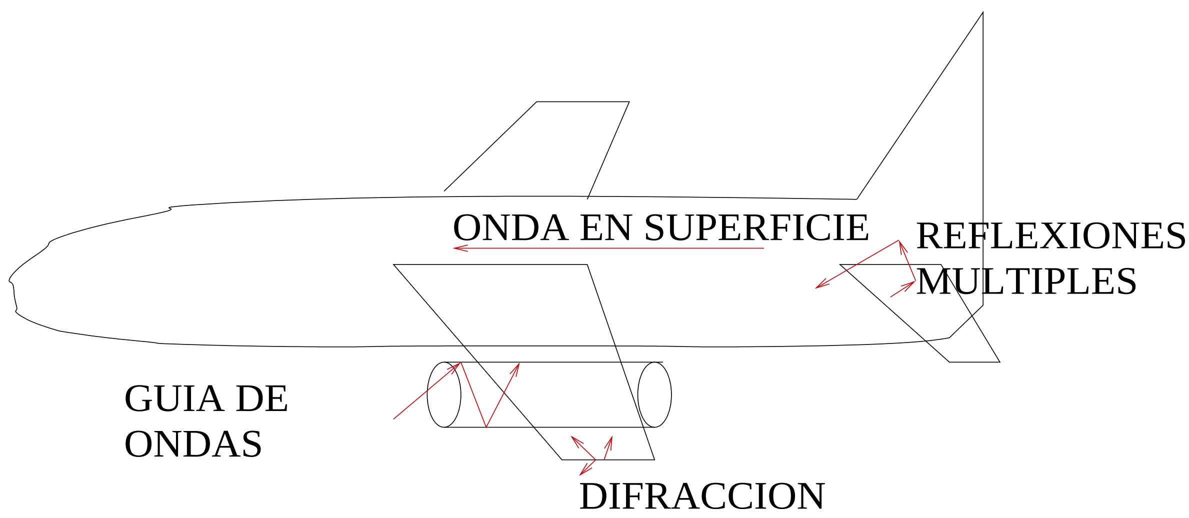
## Institute for Computational Engineering and Sciences (ICES)


**Programa Interdisciplinar**

- **1/3 Matemáticas**
- **1/3 Métodos Numéricos (Informática)**
- **1/3 Ingenierí a**

# 2. MOTIVACIÓN

## Análisis de la Sección Radar

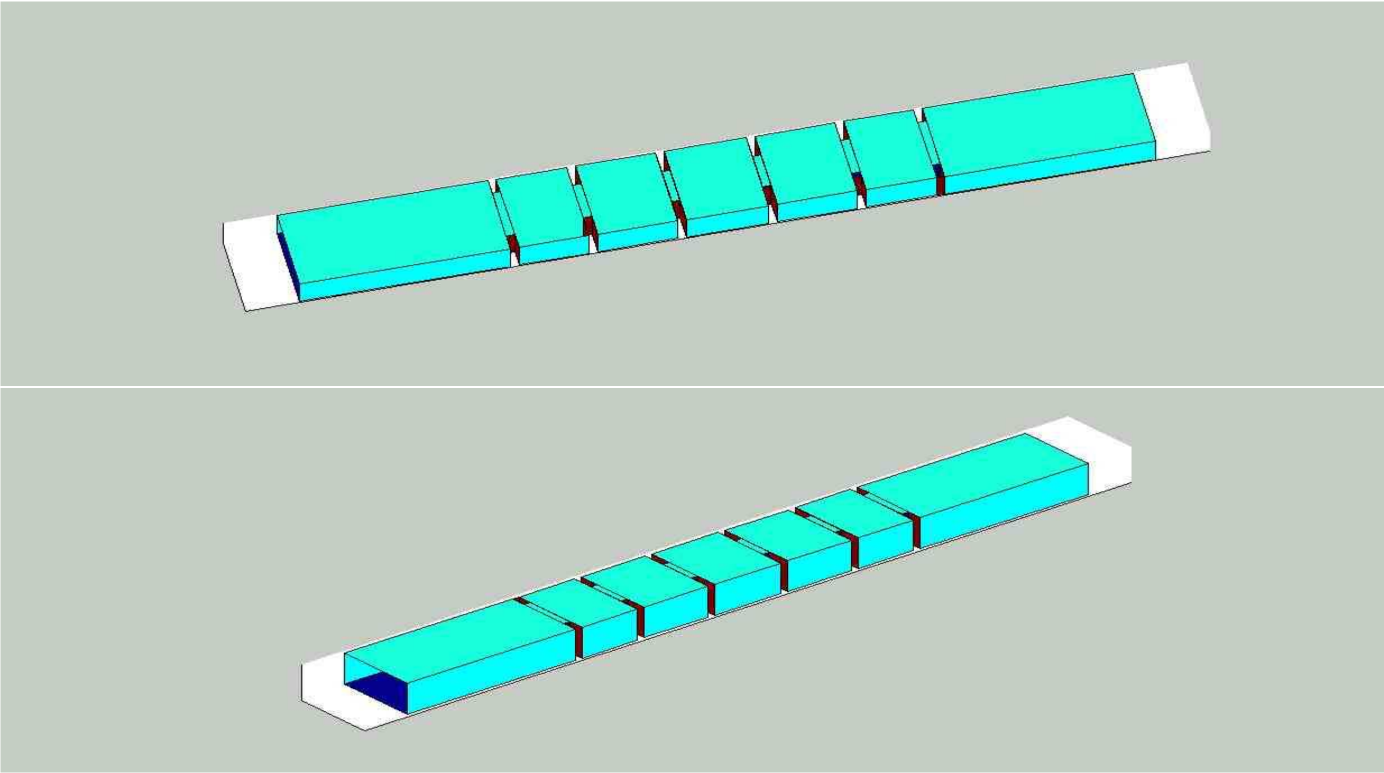



$$\textbf{RCS=}4\pi\frac{\text{Energía reflejada con respecto al ángulo}}{\text{Energía incidente}} = \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \frac{|E^s|}{|E^i|}.$$

**Objectivo: Determinación de la sección radar del avión.**

# 2. MOTIVACIÓN

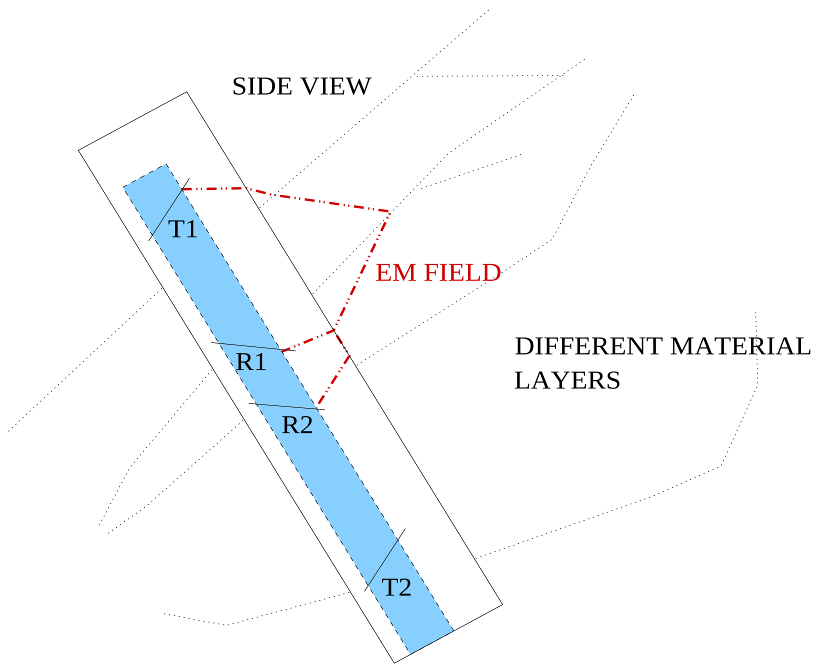
**Diseño de guí a de ondas**



**Objectivo: Determinación de la intensidad del campo eléctrico en los puertos de entrada y/o salida.**

# 2. MOTIVACIÓN

**Diseño de herramientas electromágneticas para la perforación de pozos petrolí feros**




**Objetivo: Determinación del campo electromagnético en las antenas receptoras.**

# 3. ECUACIONES DE MAXWELL

## Ecuaciones de Maxwell en el Dominio de la Frecuencia:

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -j\mu\omega\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\epsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}^{imp}\end{aligned}}$$

## Ecuación de Onda (Reducida):

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}\right) - (\omega^2\epsilon - j\omega\sigma)\boldsymbol{E} = -j\omega\boldsymbol{J}^{imp} \,,$$

## Condiciones en la Frontera:

- **Dirichlet:**

$$\mathbf{n} \times \boldsymbol{E}^s = -\mathbf{n} \times \boldsymbol{E}^{inc} \qquad\qquad \mathbf{n} \times \boldsymbol{E} = 0$$

- **Neumann:**

$$\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{E}^s = -\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{E}^{inc} \qquad\qquad \mathbf{n} \times \frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mathbf{J}_S^{imp}$$

- **Condición de radiación de Silver Müller en $\infty$:**

$$\mathbf{e}_r \times (\nabla \times \boldsymbol{E}^s) - jk_0 \times \boldsymbol{E}^s = O(r^{-2})$$

# 3. ECUACIONES DE MAXWELL

## Formulación Variacional

**Ecuación de onda (reducida) en $\Omega$,**

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times E\right) - (\omega^2\epsilon - j\omega\sigma)E = -j\omega J^{imp} \,,$$

**Formulación Variacional:**

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathrm{E} \in H_D(\mathrm{curl};\Omega) \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathrm{E}) \cdot (\nabla \times \bar{F})dx - \int_\Omega (\omega^2\epsilon - j\omega\sigma)E \cdot \bar{\mathrm{F}}dx = \\ \qquad\qquad \displaystyle -j\omega\left\{\int_\Omega J^{imp} \cdot \bar{F}dx + \int_{\Gamma_2} J_S^{imp} \cdot \bar{F}dS\right\} \quad \text{para todo } F \in H_D(\mathrm{curl};\Omega) \,. \end{array}\right.$$

**Formulación Variacional estabilizada (usando un *Multiplicador de Lagrange*):**

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Encontrar } E \in H_D(\mathrm{curl};\Omega), p \in H_D^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{\mu}(\nabla \times E)(\nabla \times \bar{F})dx - \int_\Omega (\omega^2\epsilon - j\omega\sigma)E \cdot \bar{F}dx - \int_\Omega (\omega^2\epsilon - j\omega\sigma)\nabla p \cdot \bar{F}dx = \\ \qquad\qquad \displaystyle -j\omega\left\{\int_\Omega J^{imp} \cdot \bar{F}dx + \int_{\Gamma_2} J_S^{imp} \cdot \bar{F}dS\right\} \quad \forall F \in H_D(\mathrm{curl};\Omega) \\ \displaystyle -\int_\Omega (\omega^2\epsilon - j\omega\sigma)E \cdot \nabla\bar{q}\; dx = -j\omega\left\{\int_\Omega J^{imp} \cdot \nabla\bar{q}\; dx + \int_{\Gamma_2} J_S^{imp} \cdot \nabla\bar{q}dS\right\} \quad \forall q \in H_D^1(\Omega) \,. \end{array}\right.$$

# 3. ECUACIONES DE MAXWELL

## El diagrama de Rham

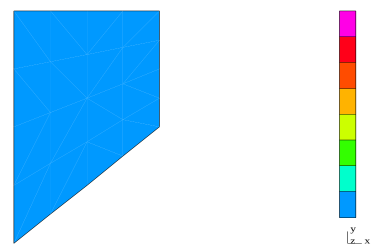
**El diagrama de Rham juega un papel fundamental en la teorí a de Elementos Finitos con applicaciones al electromagnetismo.**

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{R} & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\nabla} & Q & \xrightarrow{\nabla\times} & V & \xrightarrow{\nabla\circ} & L^2 & \longrightarrow & 0 \\
\Big\downarrow id & & \Big\downarrow \Pi & & \Big\downarrow \Pi^{\mathrm{curl}} & & \Big\downarrow \Pi^{\mathrm{div}} & & \Big\downarrow P & & \\
\mathbb{R} & \longrightarrow & W^{\mathrm{p}} & \xrightarrow{\nabla} & \mathrm{Q}^{\mathrm{p}} & \xrightarrow{\nabla\times} & \mathrm{V}^{\mathrm{p}} & \xrightarrow{\nabla\circ} & W^{\mathrm{p}-1} & \longrightarrow & 0\,.
\end{array}$$

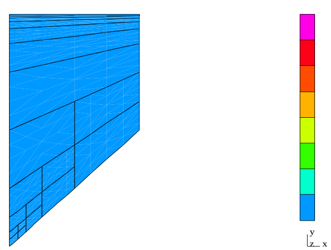
Este diagrama relaciona dos sucesiones de espacios exactas (en el sentido matemático), una formada por espacios de dimensión infinita, y otra formada por espacios de dimensión finita, por medio de unos interpoladores.

# 4. ELEMENTOS FINITOS EN $HP$

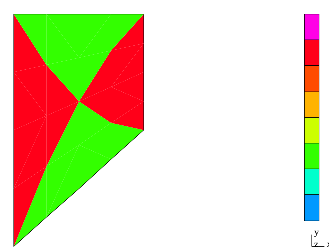
## Diferentes tipos de refinamientos en elementos finitos:



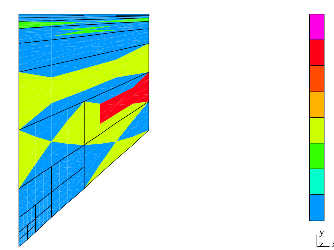
Malla inicial



Malla refinada en *h*



Malla refinada en *p*



Malla refinada en *hp*

# 4. REFINAMIENTOS (ADAPTIVIDAD) EN $HP$

**Produce Convergencia Exponencial**
**en problemas CON y sin singularidades**

**si el mallado es óptimo en $hp$, tanto en el régimen asintótico (resultados teóricos y numéricos), como en el régimen preasintótico (resultados numéricos).**

---

**El error de dispersión es más pequeño**

**a medida que $p$ incrementa.**

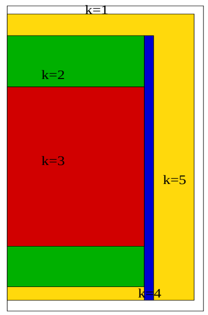
---

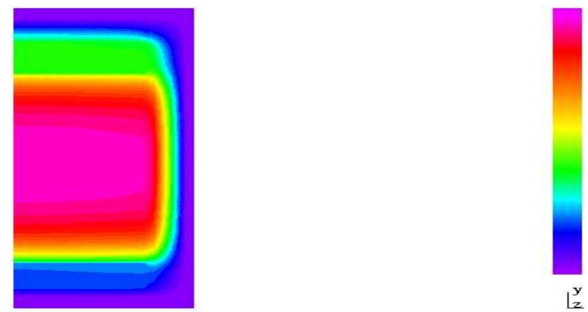
**Es posible reproducir más detalles geométricos**

**a medida que el tamaño $h$ de cada elemento disminuye.**

# 4. REFINAMIENTOS (ADAPTIVIDAD) EN $HP$

## Ecuación del calor NO isotrópica



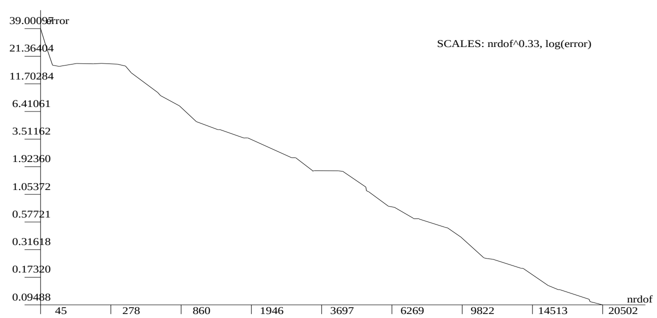



**Ecuación:** $\nabla(\mathrm{K}\nabla u) = f^{(k)}$

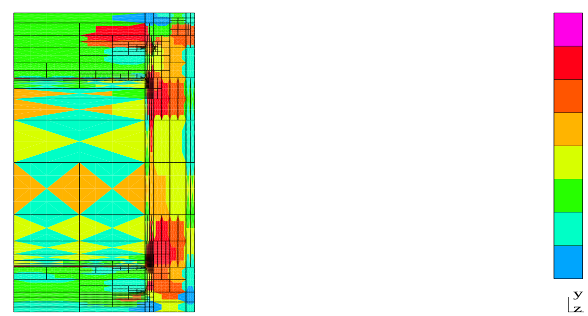
$$\mathrm{K} = \mathrm{K}^{(k)} = \begin{bmatrix} K_x^{(k)} & 0 \\ 0 & K_y^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$K_x^{(k)} = (25,\ 7,\ 5,\ 0{,}2,\ 0{,}05)$$
$$K_y^{(k)} = (25,\ 0{,}8,\ 0{,}0001,\ 0{,}2,\ 0{,}05)$$

**Solución: Desconocida**
**Condiciones en la Frontera:**
$K^{(i)}\nabla u \cdot n = g^{(i)} - \alpha^{(i)} u$



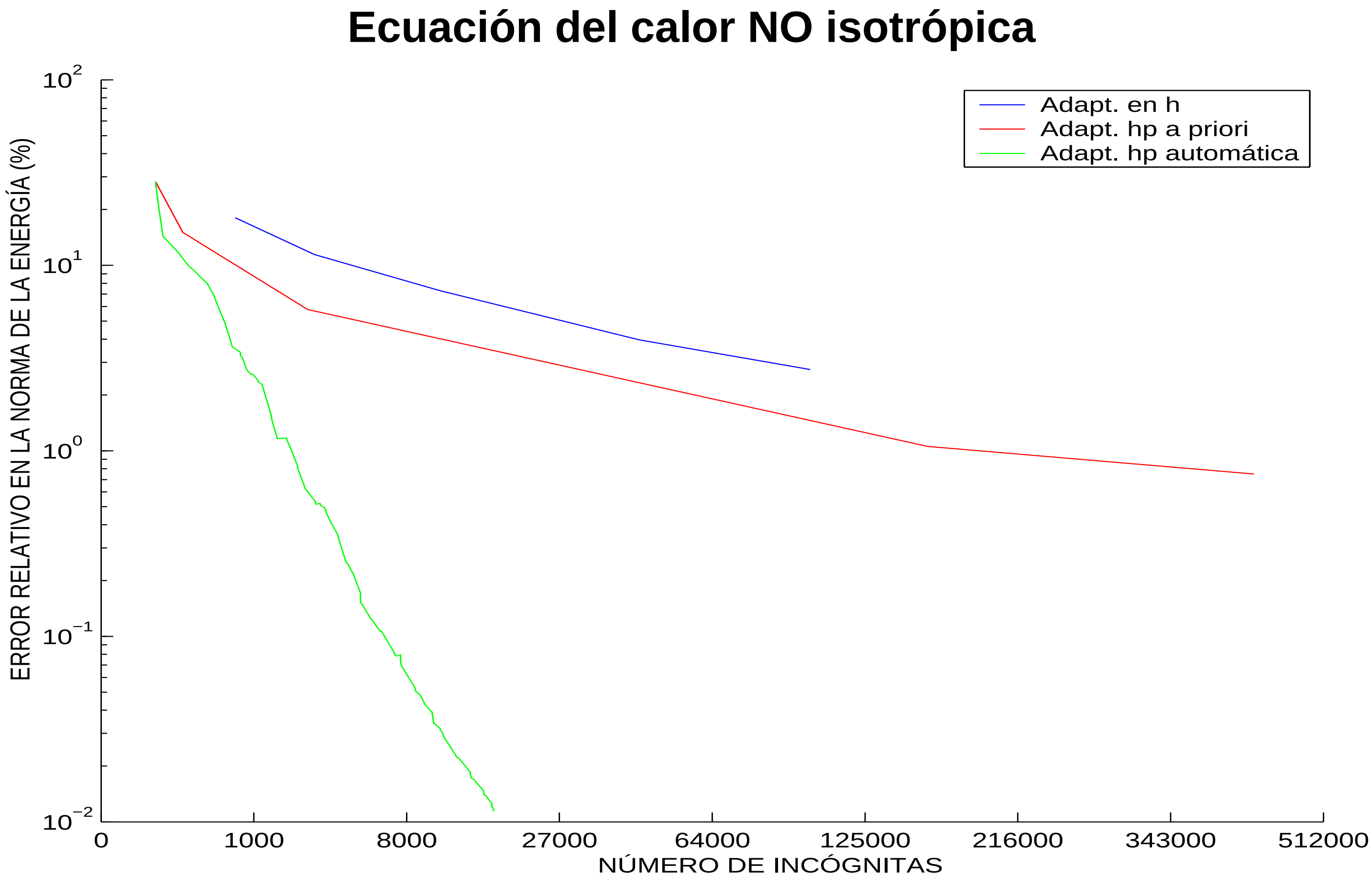

**Convergencia exponencial**
**(tolerancia en el error= 0.1 %)**



**Mallado $hp$ óptimo**

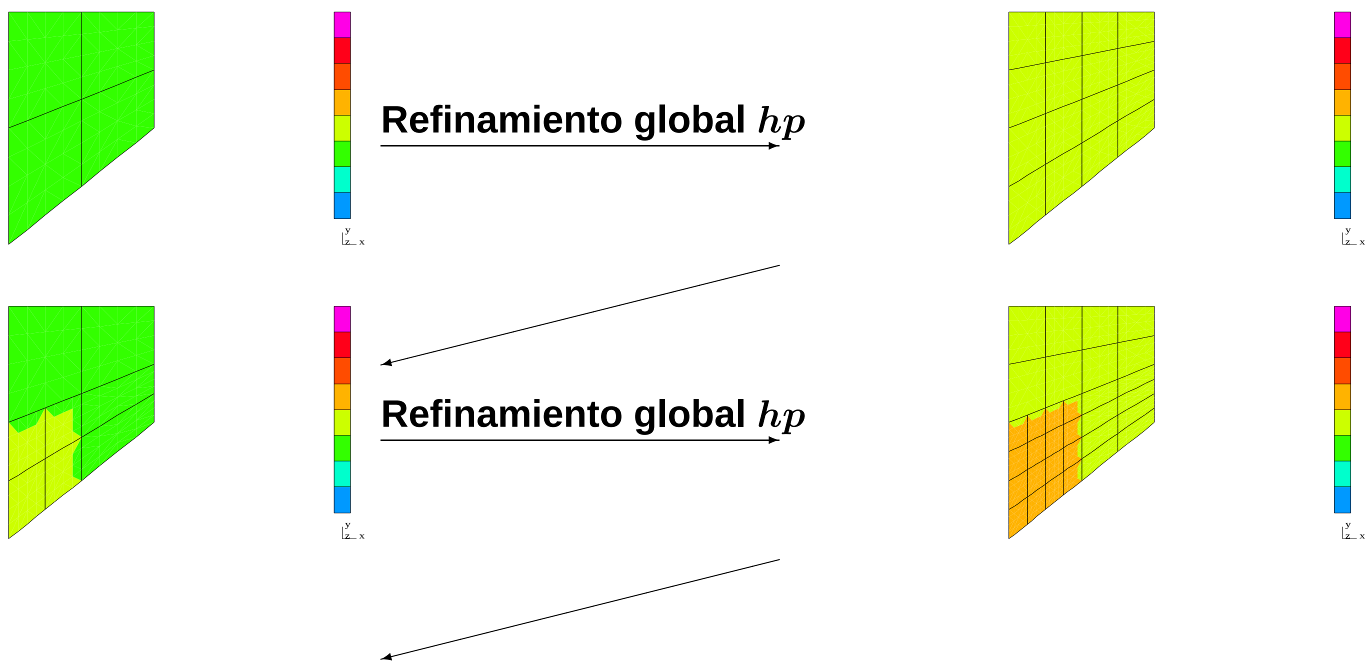
# 4. REFINAMIENTOS (ADAPTIVIDAD) EN $HP$

## Convergencia usando distintos tipos de refinamientos



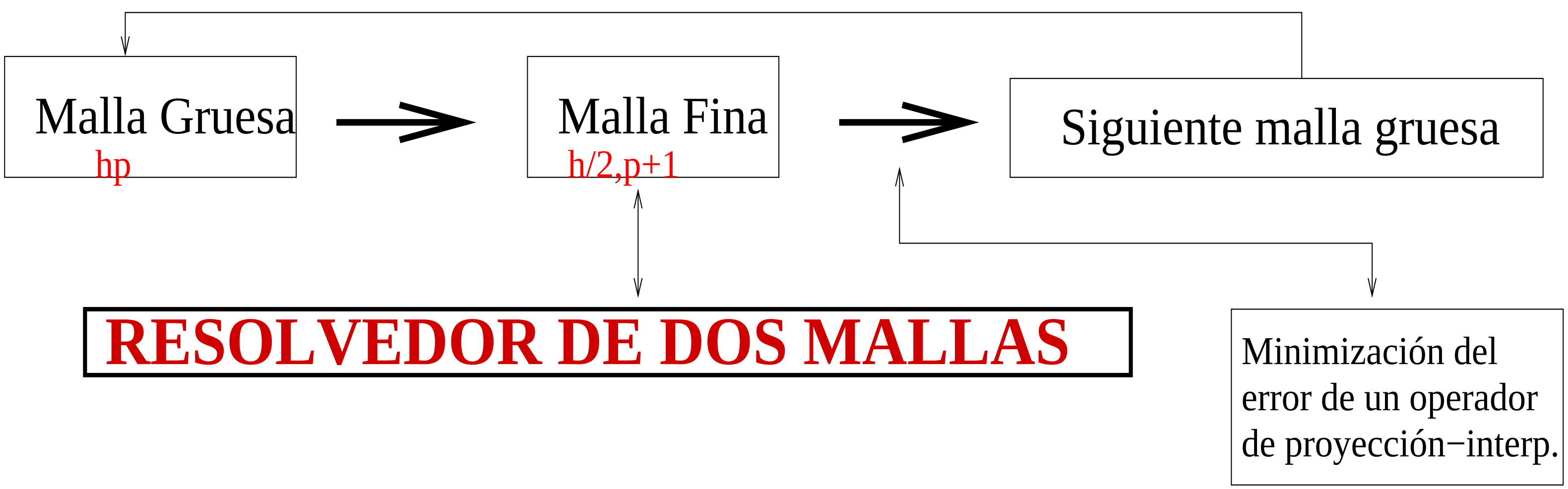
# 5. REFINAMIENTOS AUTOMÁTICOS EN $HP$

## Refinamientos automáticos en $hp$



# 5. REFINAMIENTOS AUTOMÁTICOS EN $HP$

**La estrategia de refinamientos automáticos en $hp$ converge exponencialmente, permitiendo obtener soluciones muy precisas de problemas electromagnéticos complejos.**



# RESOLVEDOR DE DOS MALLAS (SPD)

**Buscamos $x$ tal que $Ax = b$. Usando iteraciones de Richardson:**

$$\boxed{\begin{aligned} r^{(n+1)} &= [I - \alpha^{(n)} AS] r^{(n)} \\ x^{(n+1)} &= x^{(n)} + \alpha^{(n)} S r^{(n)} \end{aligned}}$$

**donde $S$ es una matriz, y $\alpha^{(n)}$ un parámetro de relajación. $\alpha^{(n)}$ *óptimo* si:**

$$\boxed{\alpha^{(n)} = \arg\ \min \| x^{(n+1)} - x \|_A = \frac{(A^{-1} r^{(n)}, S r^{(n)})_A}{(S r^{(n)}, S r^{(n)})_A}}$$

**As´ı , definimos nuestro resolvedor de dos mallas como:**

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{1 iteración con } S = S_F = \sum A_i^{-1} \quad + \\ &\text{1 iteración con } S = S_C = P A_C^{-1} R \end{aligned}}$$

# RESOLVEDOR DE DOS MALLAS (SPD)

## Reducción del error y criterio de parada

**Sea** $e^{(n)} = x^{(n)} - x$ **el error en el paso** $n$, $\tilde{e}^{(n)} = [I - S_C A]e^{(n)} = [I - P_C]e^{(n)}$**. Entonces:**

$$\boxed{\frac{\| e^{(n+1)} \|_A^2}{\| e^{(n)} \|_A^2} = 1 - \frac{| (\tilde{e}^{(n)}, S_F A \tilde{e}^{(n)})_A |^2}{\| \tilde{e}^{(n)} \|_A^2 \| S_F A \tilde{e}^{(n)} \|_A^2} = 1 - \frac{| (\tilde{e}^{(n)}, (P_C + S_F A)\tilde{e}^{(n)})_A |^2}{\| \tilde{e}^{(n)} \|_A^2 \| S_F A \tilde{e}^{(n)} \|_A^2}}$$

**Por consiguiente:**

$$\boxed{\frac{\| e^{(n+1)} \|_A^2}{\| e^{(n)} \|_A^2} \leq \sup_e [1 - \frac{| (e, (P_C + S_F A)e)_A |^2}{\| e \|_A^2 \| S_F A e \|_A^2}] \leq C < 1 \quad \text{(Reducción del Error)}}$$

---

**Para nuestro criterio de parada, desearí amos: Error del Método Iterativo** $\approx$ **Error de Discretización. Es decir:**

$$\boxed{\frac{\| e^{(n+1)} \|_A}{\| e^{(0)} \|_A} \leq 0{,}01 \quad \text{(Criterio de Parada)}}$$

# RESOLVEDOR DE DOS MALLAS (EM)

**Buscamos $x$ tal que $Ax = b$. Usando iteraciones de Richardson:**

$$\boxed{\begin{aligned} r^{(n+1)} &= [I - \alpha^{(n)} AS] r^{(n)} \\ x^{(n+1)} &= x^{(n)} + \alpha^{(n)} S r^{(n)} \end{aligned}}$$

**donde $S$ es una matriz, y $\alpha^{(n)}$ un parámetro de relajación. $\alpha^{(n)}$ *óptimo* si:**

$$\alpha^{(n)} = \arg\ \text{mín} \parallel x^{(n+1)} - x \parallel_B = \frac{(A^{-1} r^{(n)}, S r^{(n)})_B}{(S r^{(n)}, S r^{(n)})_B} \quad \textbf{(NO COMPUTABLE)}$$

**Definimos nuestro resolvedor de dos mallas para problemas EM como:**

**1 iteración con** $S = S_F = \sum A_i^{-1} \quad +$

**1 iteración con** $S = S_\nabla = \sum G_i^{-1} \quad +$

**1 iteración con** $S = S_C = P A_C^{-1} R$

# RESOLVEDOR DE DOS MALLAS (EM)

## Un resolvedor de dos mallas utilizando elementos finitos $hp$ con aplicaciones al electromagnetismo

**Consideramos los dos siguientes problemas:**

| | |
|---|---|
| **Problema I:** $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = \mathbf{J}$ | **Problema II:** $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mathbf{E} = \mathbf{J}$ |
| **Expresión matricial:** $Au = v$ | **Expresión matricial:** $\hat{A}u = v$ |
| **Ciclo V del resolvedor de dos mallas:** | **Ciclo V del resolvedor de dos mallas:** |
| $TG = (I - \alpha_1 S_F A)(I - \alpha_2 S_\nabla A)(I - S_C A_C)$ | $\widehat{TG} = (I - \alpha_1 \hat{S}_F \hat{A})(I - \alpha_2 \hat{S}_\nabla \hat{A})(I - \hat{S}_C \hat{A}_C)$ |

**Teorema: Si h es suficientemente pequeño, entonces:**

$$\boxed{\| TGe^{(n)} \| \leq \| \widehat{TG}e^{(n)} \| + Ch}$$

**Nótese que C es independiente de $h$ y $p$.**

# RESOLVEDOR DE DOS MALLAS (EM)

## Un resolvedor de dos mallas utilizando elementos finitos $hp$ con aplicaciones al electromagnetismo

**Descomposición de Helmholtz:**

$$\boxed{H_D(\mathrm{curl};\Omega) = (Ker(\mathrm{curl})) \oplus (Ker(\mathrm{curl}))^{\perp}}$$

**Definimos los siguientes subespacios ($T$ =malla, $K$ =elemento, $v$ =vértice, $e$ =arista):**

$\Omega^v_{k,i} = \mathrm{int}(\bigcup\{\bar{K} \in T_k : v_{k,i} \in \partial K\})$ ; $\Omega^e_{k,i} = \mathrm{int}(\bigcup\{\bar{K} \in T_k : e_{k,i} \in \partial K\})$ *Descomposición del espacio*

$M^v_{k,i} = \{u \in M_k : \mathrm{supp}(u) \subset \Omega^v_{k,i}\}$ ; $M^e_{k,i} = \{u \in M_k : \mathrm{supp(u)} \subset \Omega^e_{k,i}\}$ *Descomposición de elementos*

$W^v_{k,i} = \{u \in W_k : \mathrm{supp}(u) \subset \Omega^v_{k,i}\}$ ; $W^e_{k,i} = \{u \in W_k : \mathrm{supp}(u) \subset \Omega^e_{k,i}\} = \emptyset$ *Descomposición polinomial*

**Hiptmair propuso la siguiente descomposición de $M_k$:**

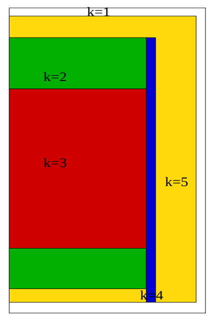
$$\boxed{M_k = \sum_e M^e_{k,i} + \sum_v \nabla W^v_{k,i}}$$

**Arnold *et. al* propusieron la siguiente descomposición de $M_k$:**

$$\boxed{M_k = \sum_v M^v_{k,i}}$$

# EFICIENCIA DEL RESOLVEDOR DE DOS MALLAS

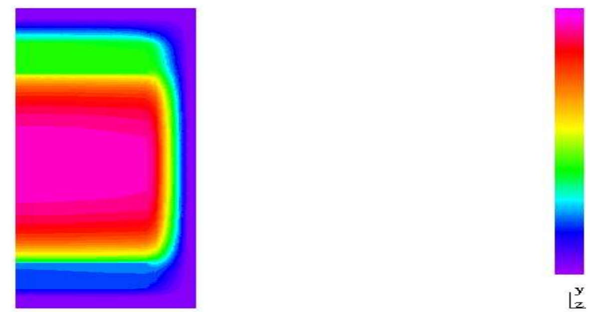
## Ecuación del calor NO isotrópica



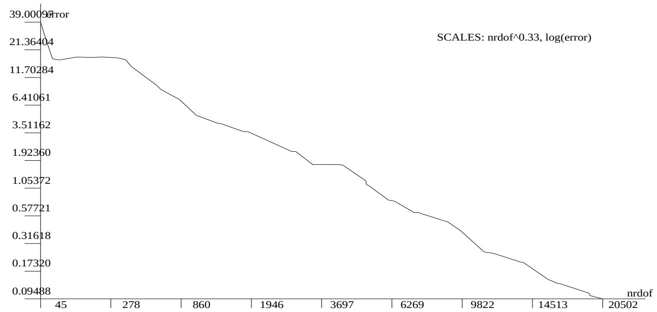

**Ecuación:** $\nabla(\mathrm{K}\nabla u) = f^{(k)}$

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}^{(k)} = \begin{bmatrix} K_x^{(k)} & 0 \\ 0 & K_y^{(k)} \end{bmatrix}$$

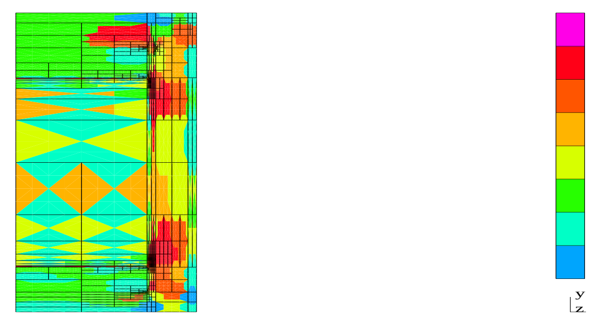
$$K_x^{(k)} = (25,\ 7,\ 5,\ 0{,}2,\ 0{,}05)$$
$$K_y^{(k)} = (25,\ 0{,}8,\ 0{,}0001,\ 0{,}2,\ 0{,}05)$$



**Solución: Desconocida**
**Condiciones en la Frontera:**
$$K^{(i)}\nabla u \cdot n = g^{(i)} - \alpha^{(i)} u$$




**Convergencia exponencial**
**(tolerancia en el error= 0.1 %)**

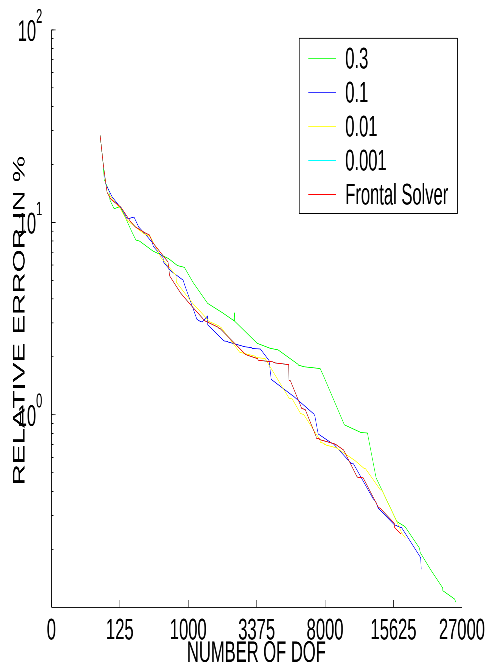


**Mallado $hp$ óptimo**

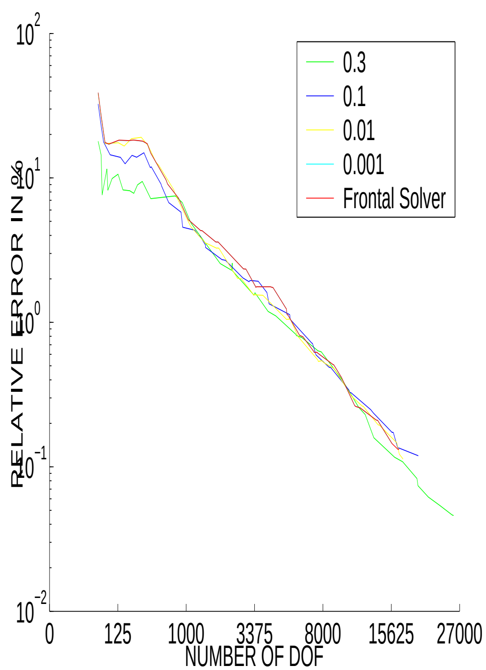
# EFICIENCIA DEL RESOLVEDOR DE DOS MALLAS

## Guiando refinamientos automáticos en $hp$

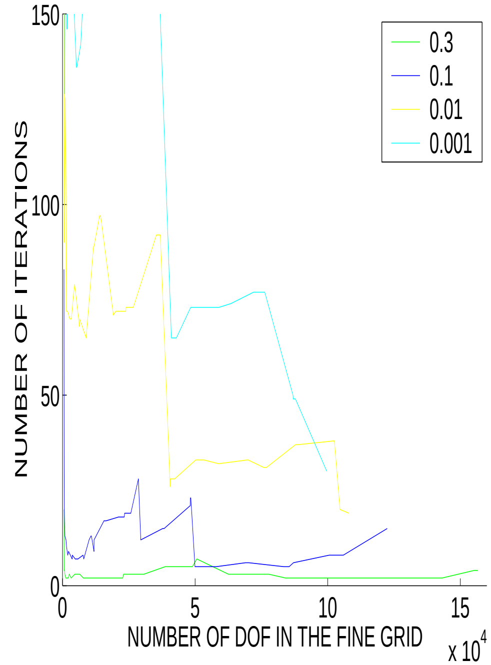
**Ecuación del calor NO isotrópica. Guiando refinamientos $hp$ con una solución en la malla fina que sólo ha convergido parcialmente.**




**Est. del error en la energía**



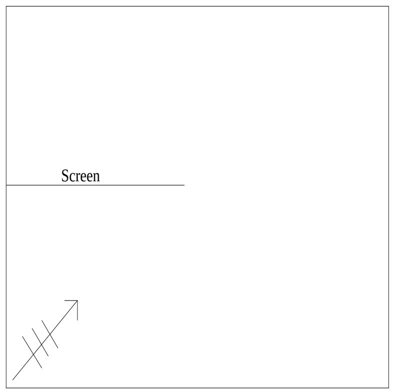

**Est. del error de discretización**



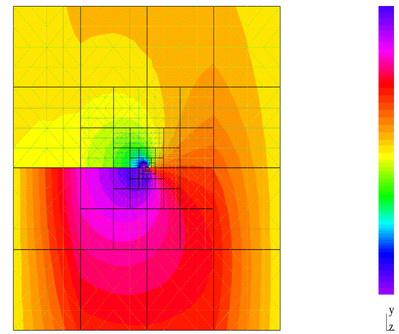

**Num. de iteraciones**

# EFICIENCIA DEL RESOLVEDOR DE DOS MALLAS

## Onda plana incidente en una pantalla (problema de difracción)

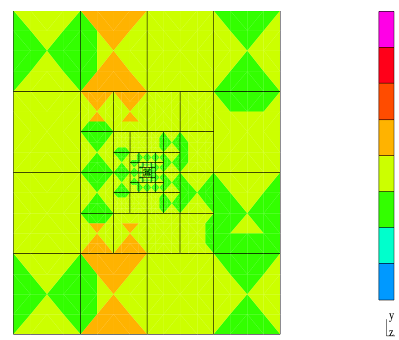



**Geometr´ı a**




**Segunda componente del campo eléctrico**


**Convergencia exponencial**
**(tolerancia en el error= 0.1 %)**

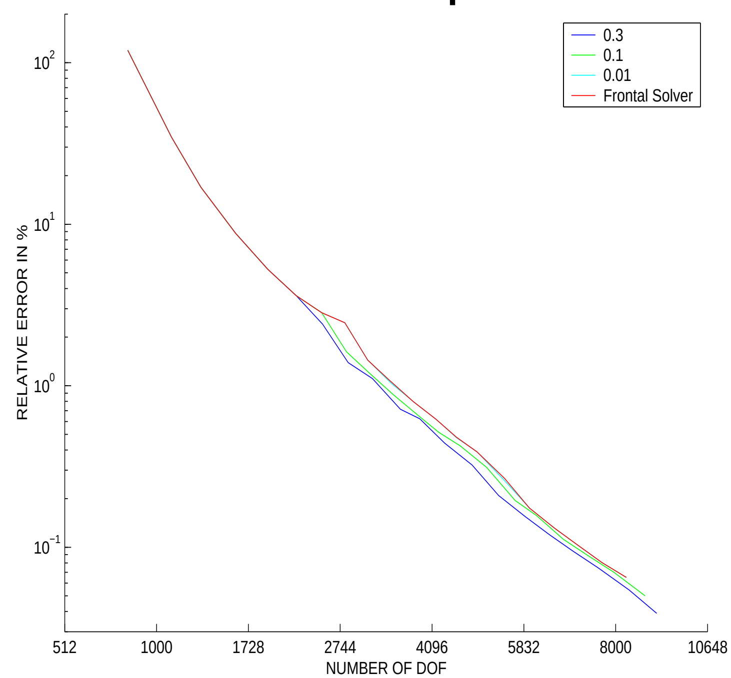



**Mallado $hp$ óptimo**

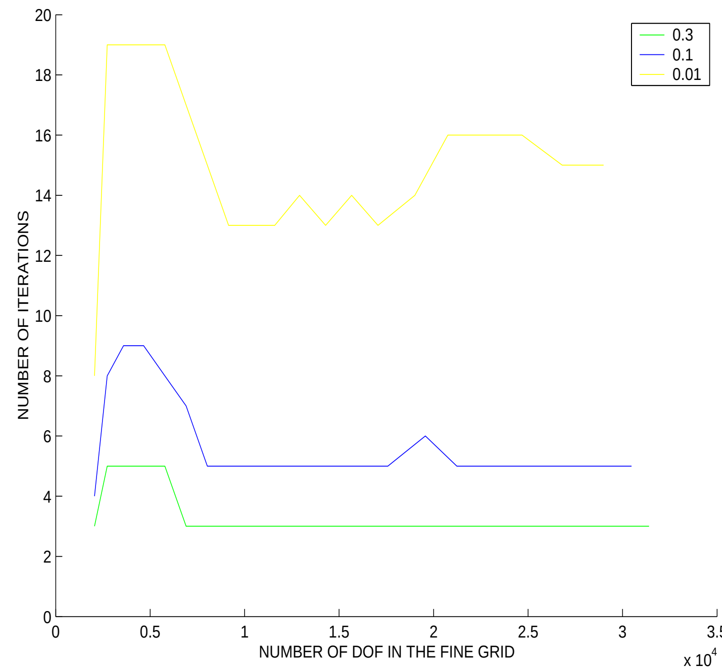
# EFICIENCIA DEL RESOLVEDOR DE DOS MALLAS

## Guiando refinamientos automáticos en $hp$

**Problema de difracción. Guiando refinamientos $hp$ con una solución en la malla fina que sólo ha convergido parcialmente.**



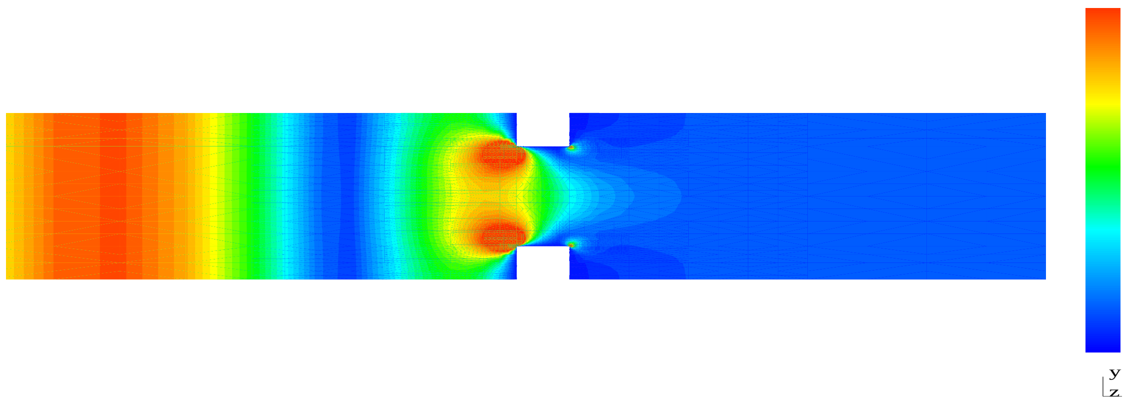

**Error de discretización**



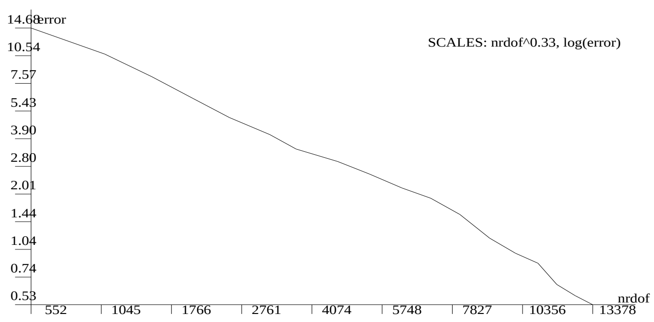

**Num. de iteraciones**

# EFICIENCIA DEL RESOLVEDOR DE DOS MALLAS

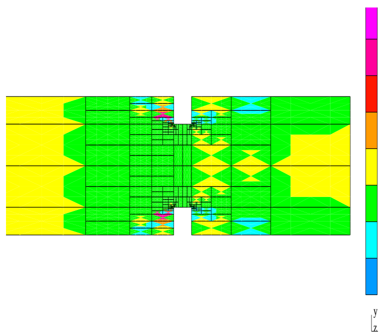
## Problema de guía de ondas




**Módulo de la Segunda Componente del Campo Magnético**




**Convergencia exponencial**
**(tolerancia en el error= 0.5 %)**

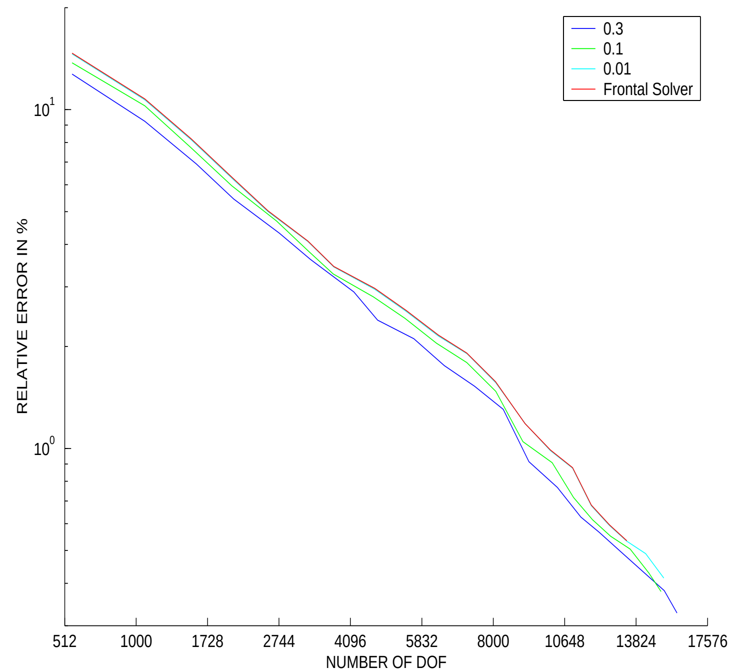


**Mallado $hp$ óptimo**

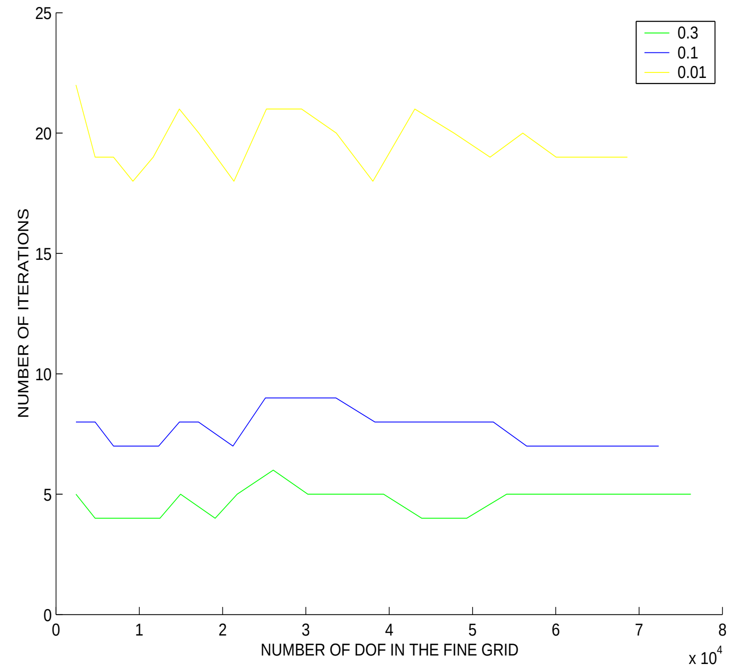
# EFICIENCIA DEL RESOLVEDOR DE DOS MALLAS

## Guiando refinamientos automáticos en $hp$

**Problema de guí a de ondas. Guiando refinamientos $hp$ con una solucǒn en la malla fina que sólo ha convergido parcialmente.**




**Error de discretización**



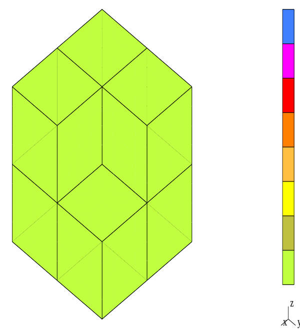

**Num. de iteraciones**



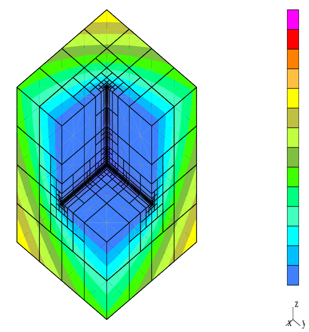
*Supervisor: Leszek Demkowicz* *Universidad de Tejas en Austin*

# EFICIENCIA DEL RESOLVEDOR DE DOS MALLAS

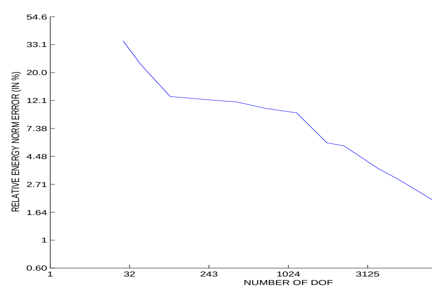
## Problema de Fickera



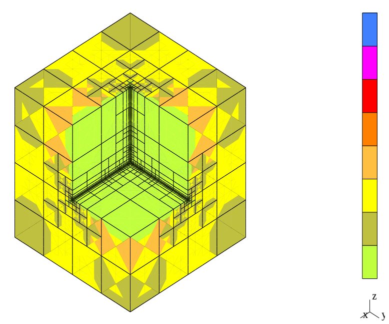
**Ecuación:** $-\Delta u = 0$
**Condiciones en la Frontera: Neumann, Dirichlet**



**Solución: Desconocida**



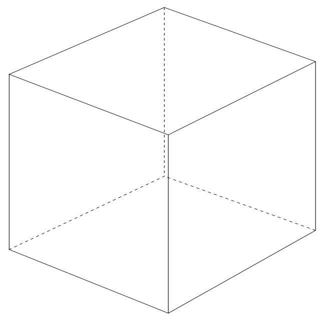

**Convergencia exponencial**
**(tolerancia en el error= 1 %)**



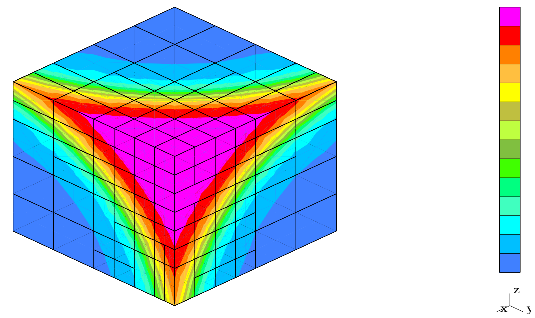
**Mallado $hp$ óptimo**

# EFICIENCIA DEL RESOLVEDOR DE DOS MALLAS

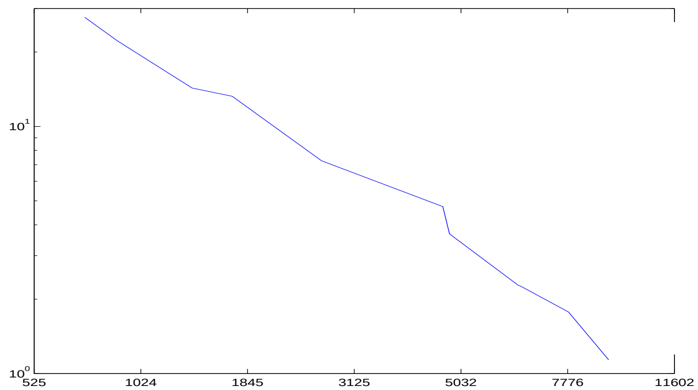
## Problema en tres dimensiones (grandes variaciones en los gradientes)



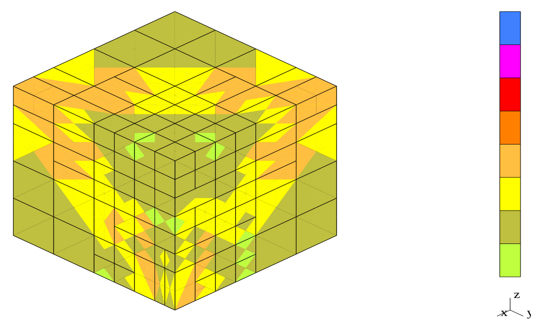
**Ecuación:** $-\Delta u = f$
**Geometría:** $[0, 1]^3$




**Solución:** $u = atan(20 * \sqrt{r} - \sqrt{3}))$
$r = (x - ,25) * *2 + (y - ,25) * *2 + (z - ,25) * *2$
**Condiciones en la Frontera: Dirichlet**




**Convergencia exponencial**
**(tolerancia en el error= 1 %)**

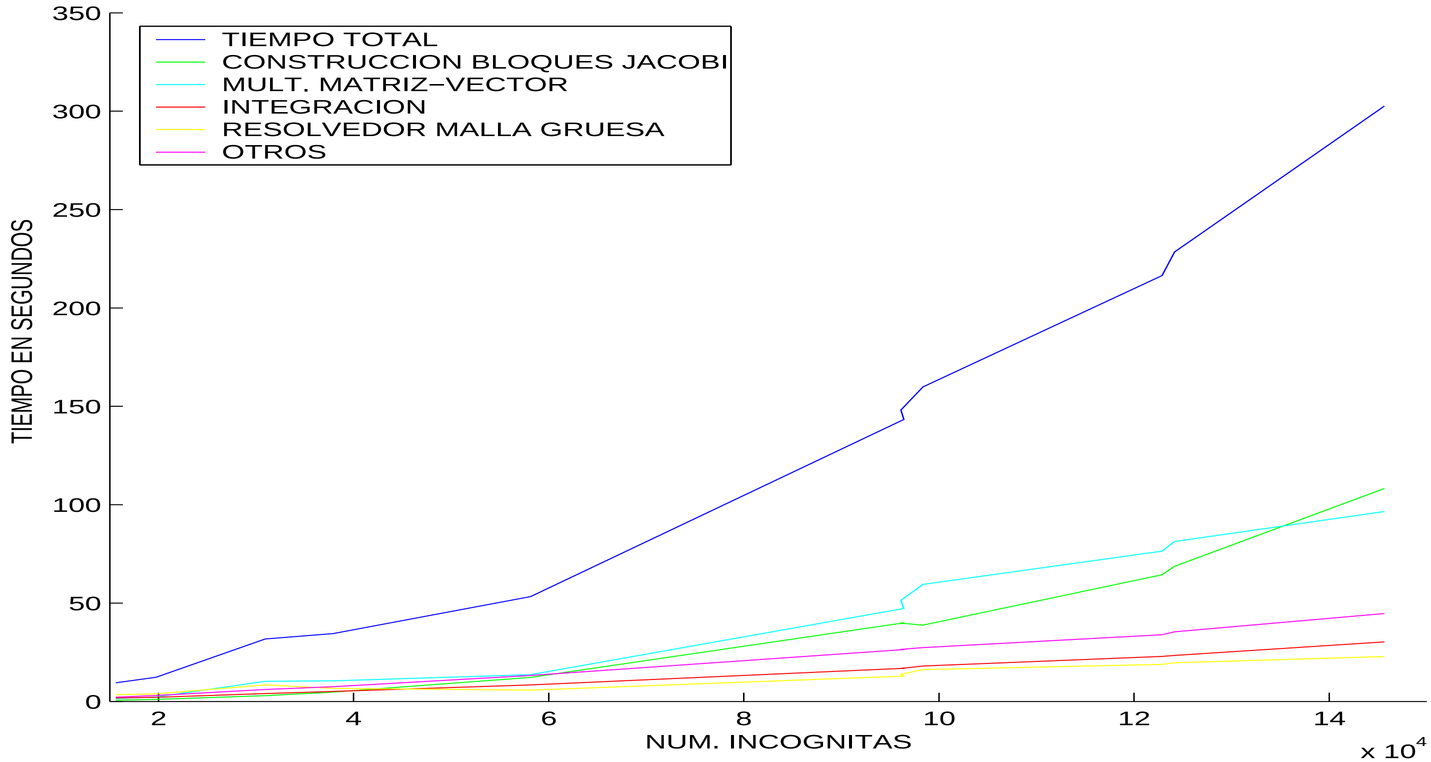



**Mallado $hp$ óptimo**

# EFICIENCIA DEL RESOLVEDOR DE DOS MALLAS

## Eficiencia del resolvedor de dos mallas

**Problema en tres dimensiones (grandes variaciones en los gradientes)**

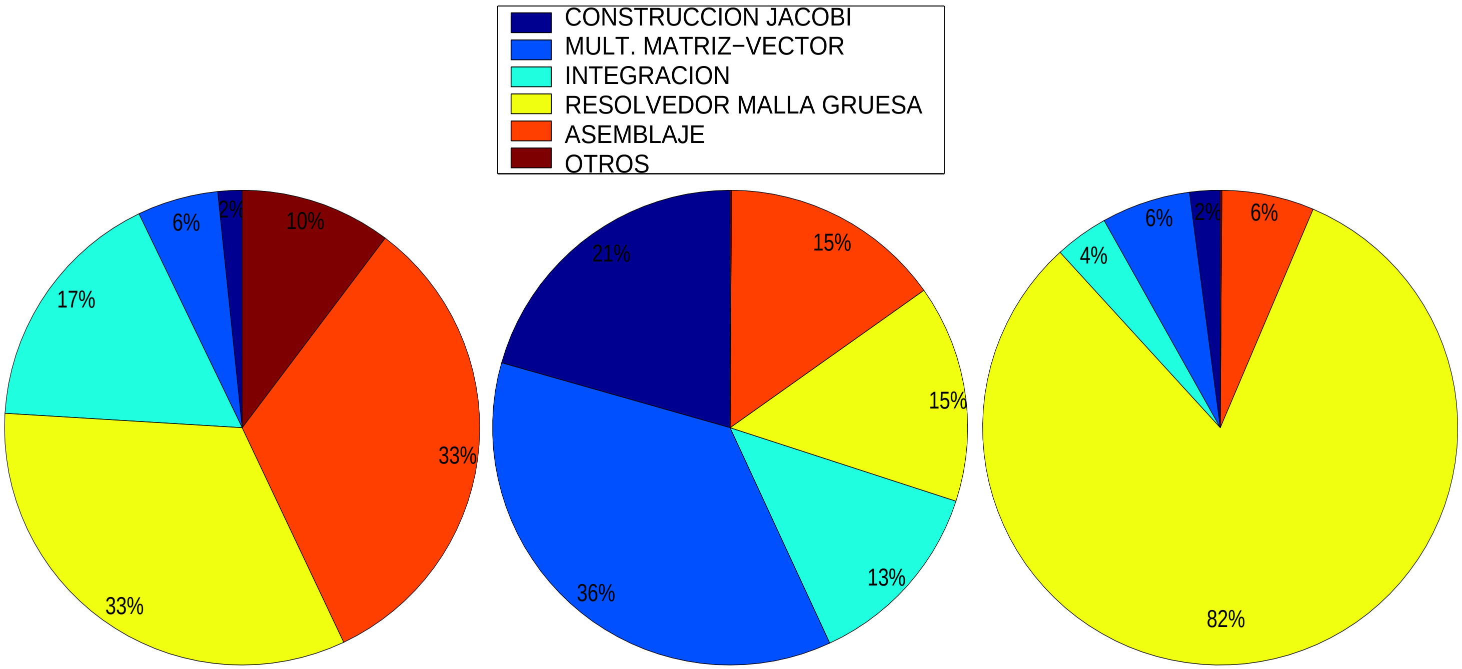



**Operaciones en memoria, procesador AMD Athlon 1 Ghz.**

# EFICIENCIA DEL RESOLVEDOR DE DOS MALLAS

## Eficiencia del resolvedor de dos mallas

**Problema en tres dimensiones (grandes variaciones en los gradientes)**



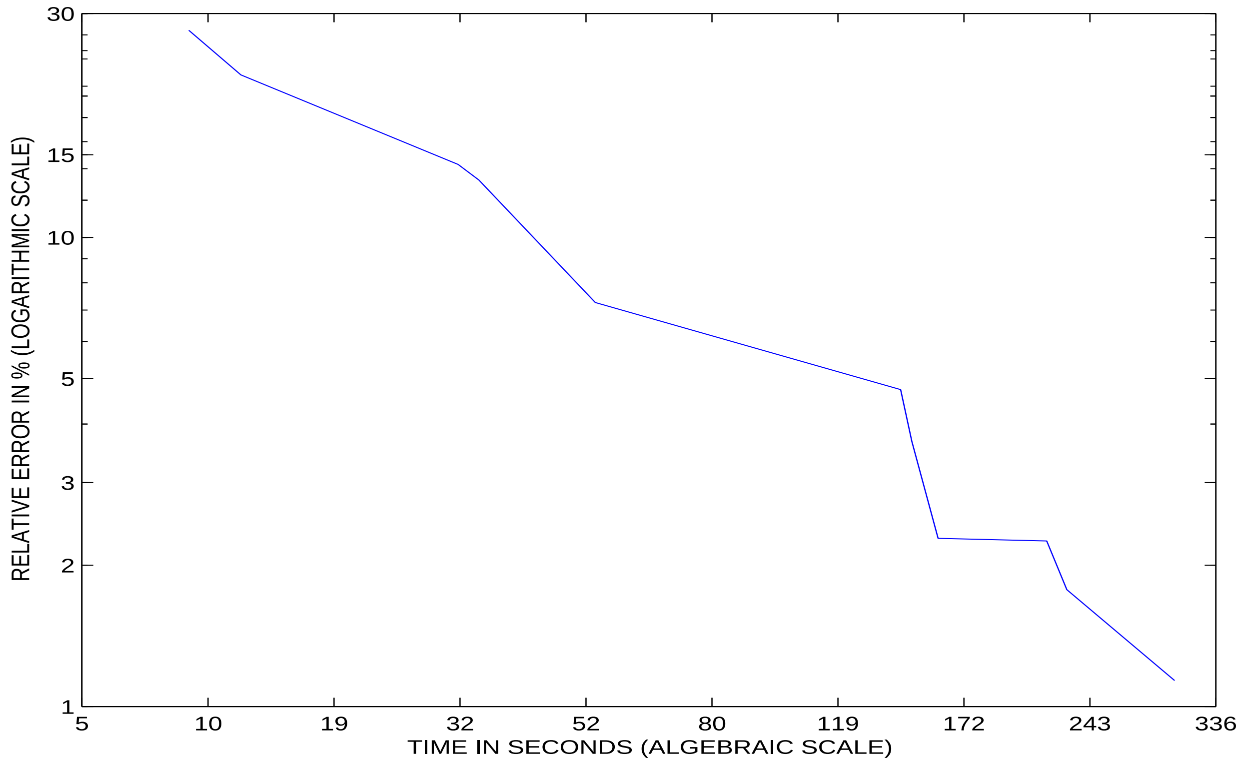

| | | |
|---|---|---|
| **Num-incógnitas≈ 2.15 Millones** | **Num-incógnitas≈ 0.27 Millones** | **Num-incógnitas≈ 2.15 Millones** |
| **Tiempo total≈ 8 minutos** | **Tiempo total≈ 10 minutos** | **Tiempo total≈ 50 minutos** |
| **Memoria* ≈ 1.0 Gb** | **Memoria* ≈ 2.0 Gb** | **Memoria* ≈ 3.5 Gb** |
| **p=2** | **p=8** | **p=4** |

***Memoria = memoria utilizada por las entradas no nulas de la matriz de masa**
**Operaciones en memoria, procesador IBM Power4 1.3 Ghz.**

# EFICIENCIA DEL RESOLVEDOR DE DOS MALLAS

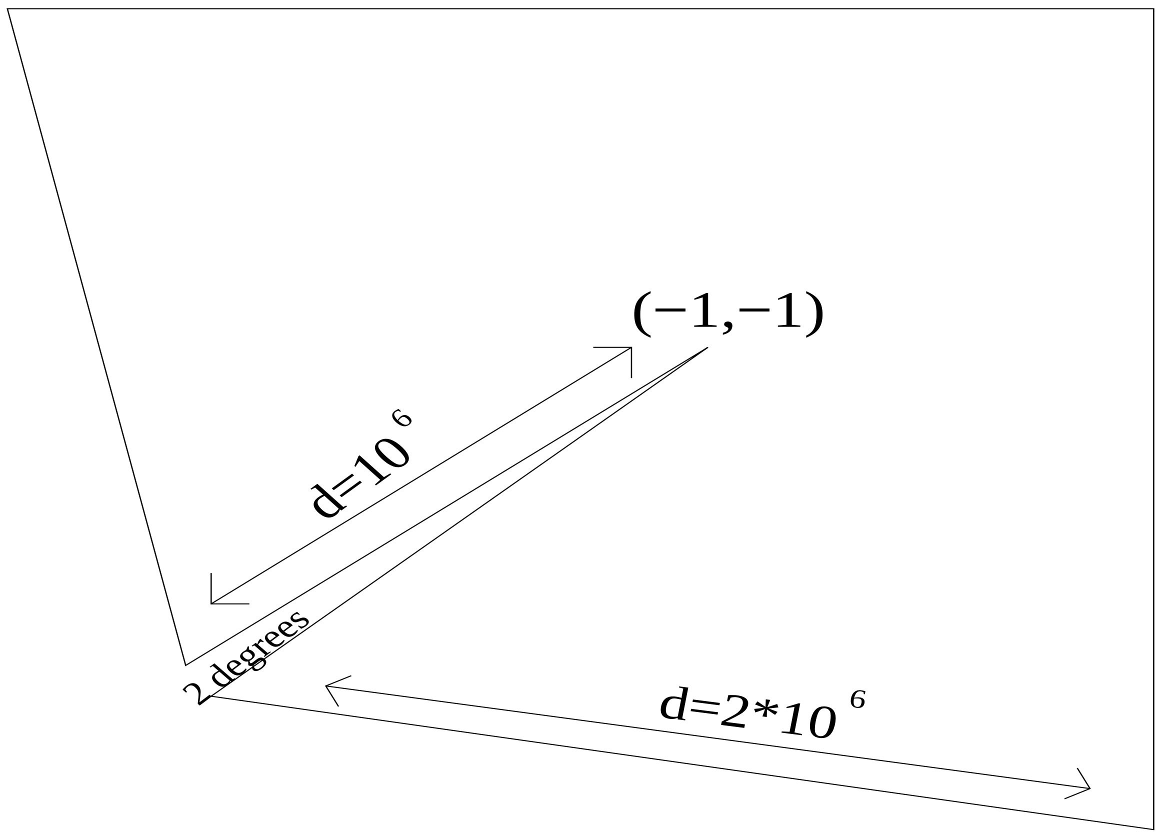
## Convergencia exponencial

**Problema en tres dimensiones (grandes variaciones en los gradientes)**
**Escalas: ERROR VS TIEMPO.**



# 9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

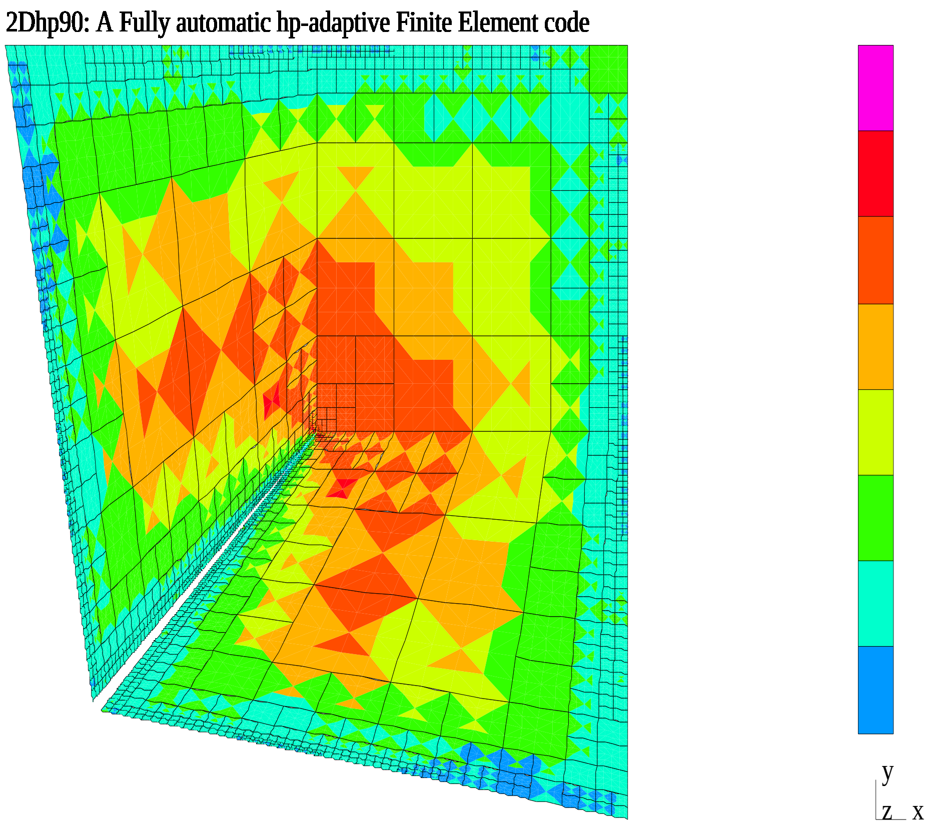
## Problema de difracción en una arista (Baker-Hughes): Electrostática




Dirichlet Boundary Conditions
u(boundary)=−ln r, r=sqrt (x*x+y*y)

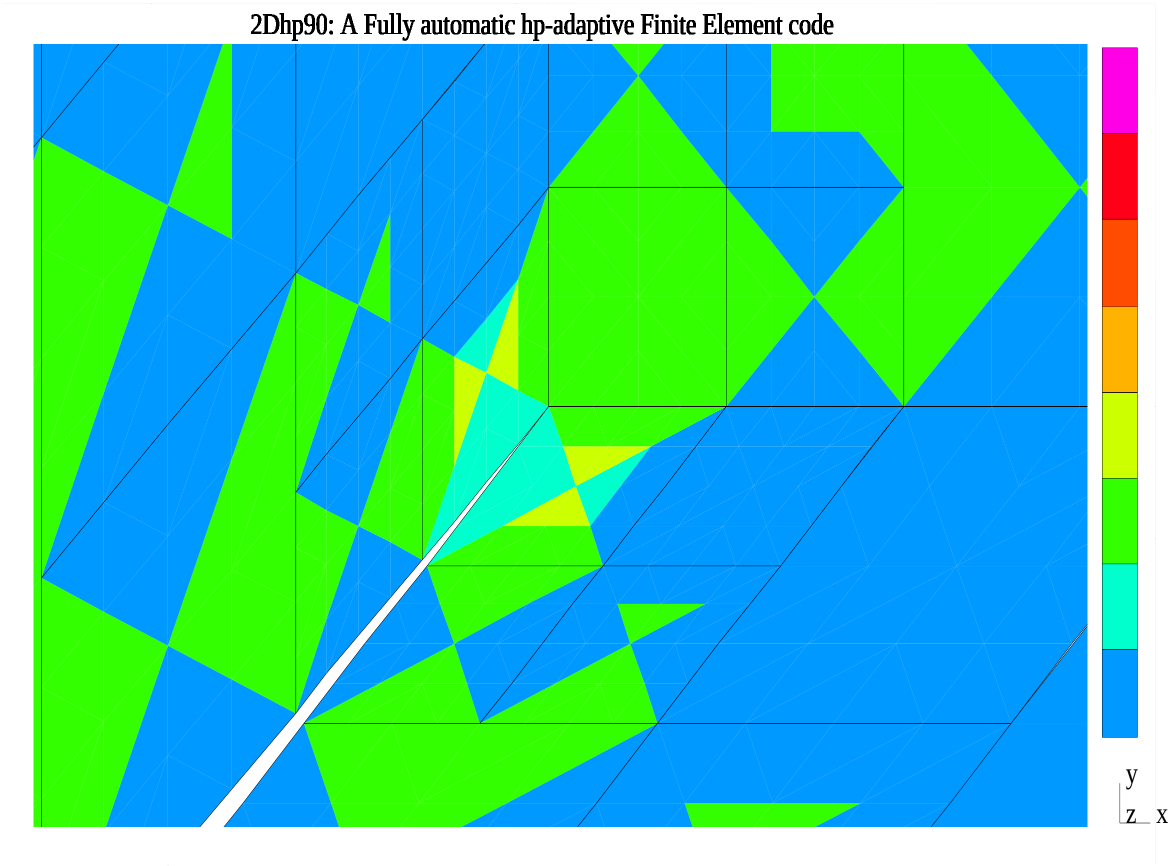
# 9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

## Problema de difracción en una arista : Mallado $hp$ óptimo, Zoom = 1



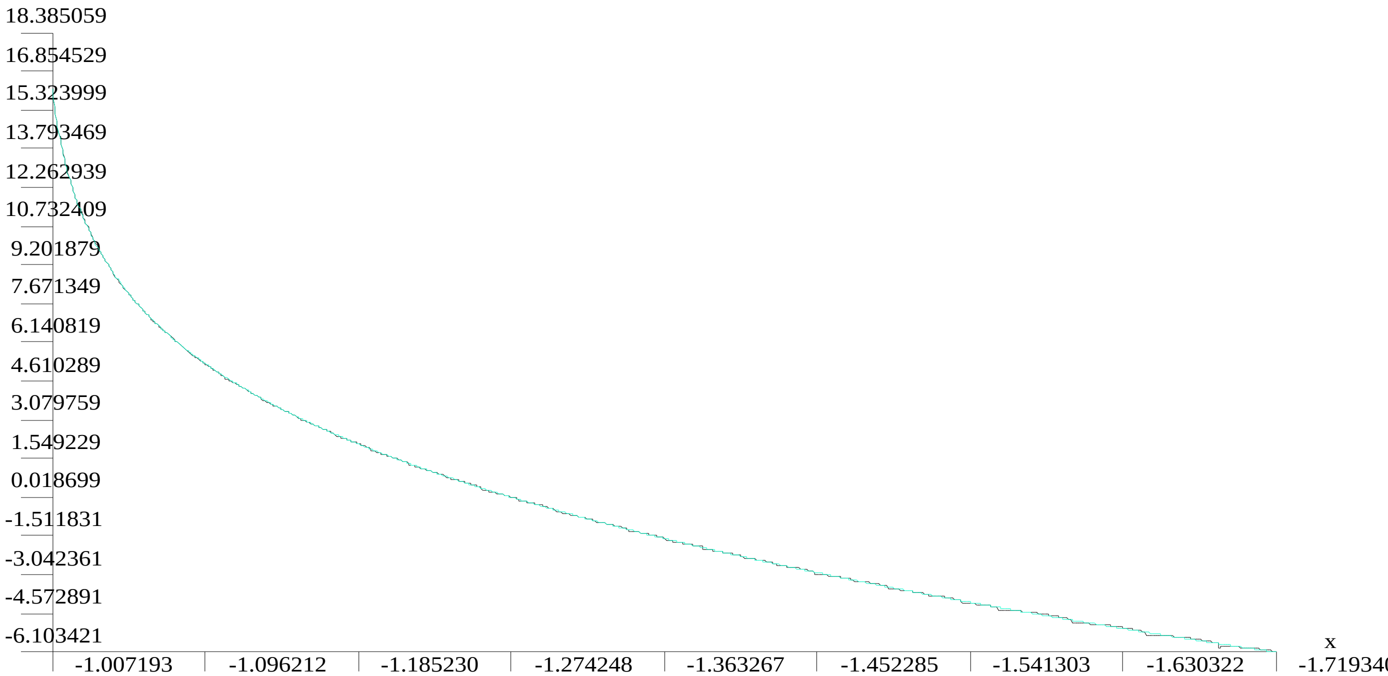
# 9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

**Problema de difracción en una arista : Mallado $hp$ óptimo, Zoom = $10^{13}$**



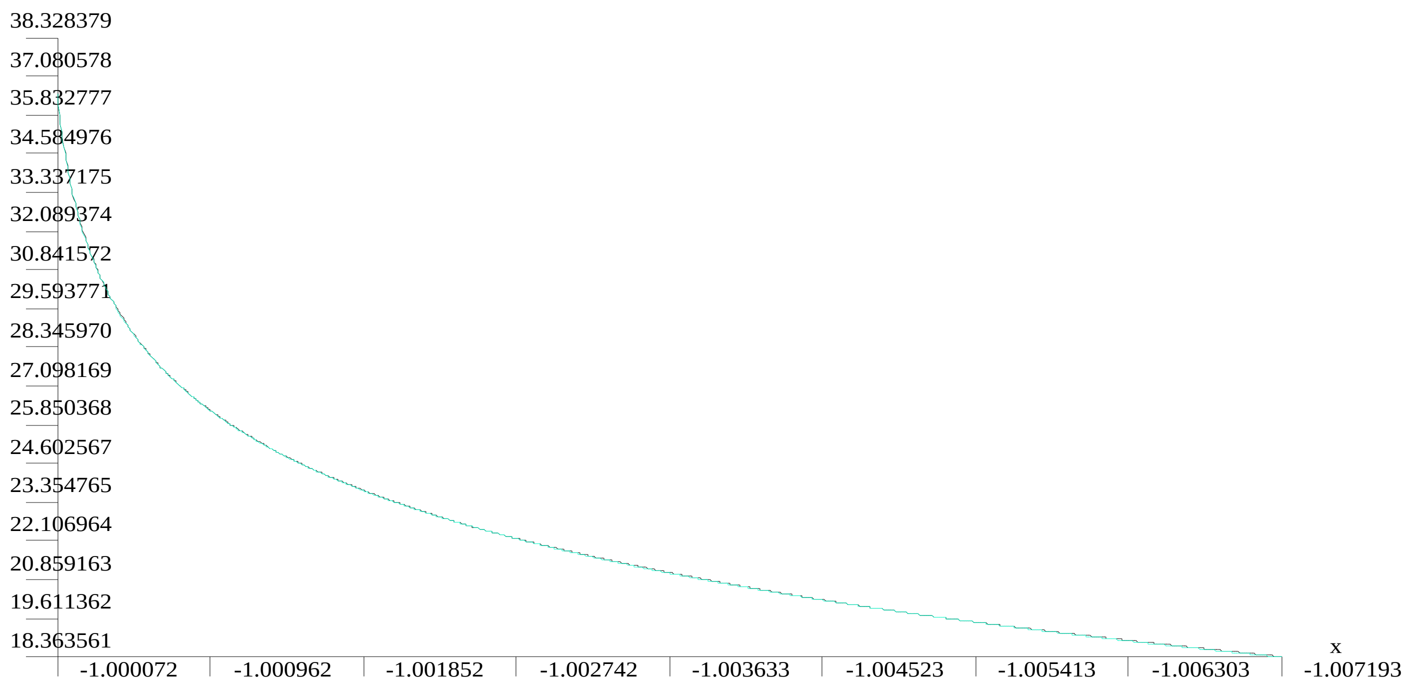
# 9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

## Problema de difracción en una arista: Comparación entre la solución exacta y aproximada a distancias 0.01-1 de la singularidad



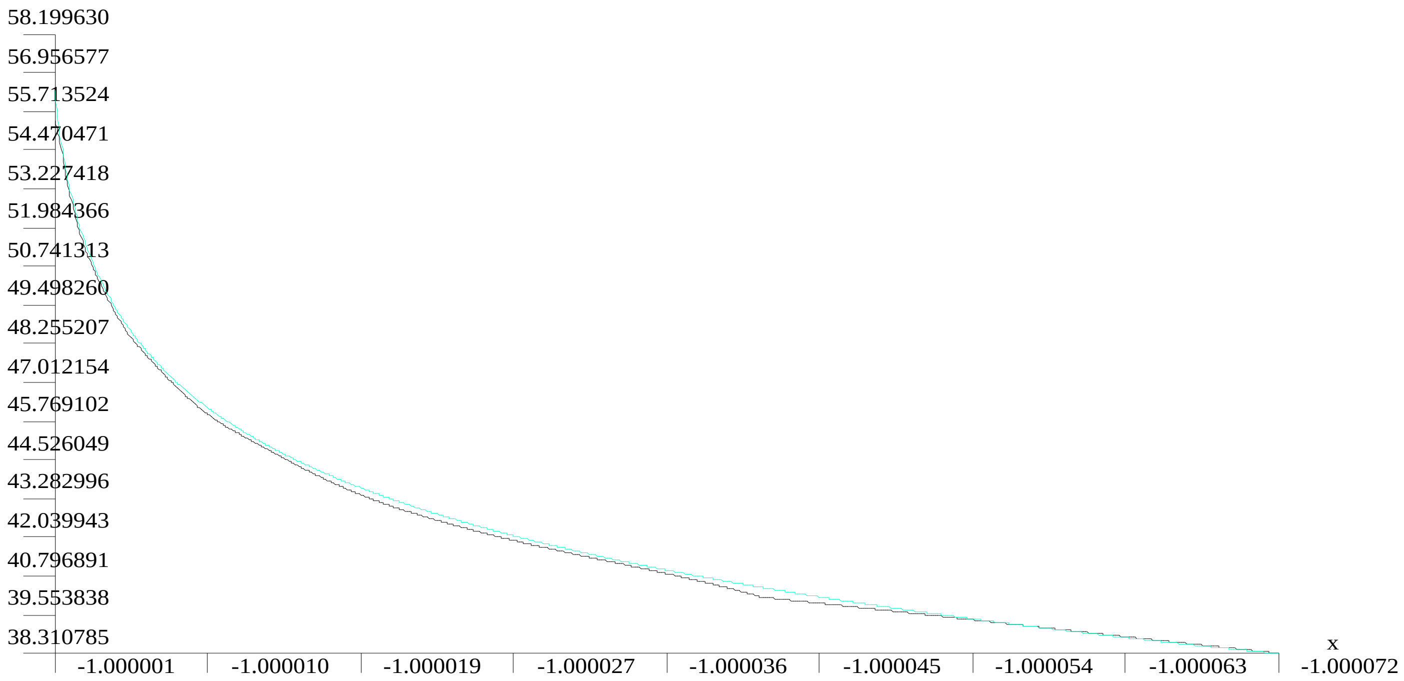
# 9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

**Problema de difracción en una arista: Comparación entre la solución exacta y aproximada a distancias 0.0001-0.01 de la singularidad**



# 9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

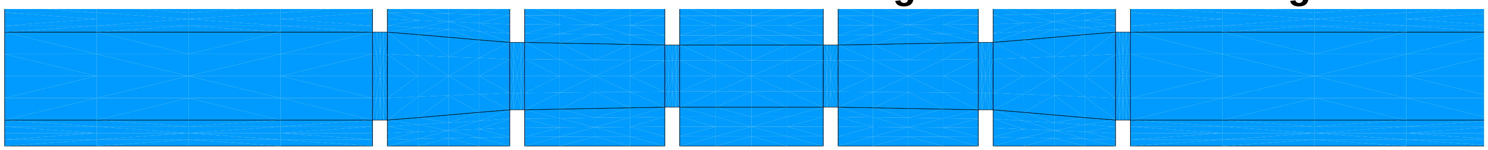
**Problema de difracción en una arista: Comparación entre la solución exacta y aproximada a distancias 0.000001-0.0001 de la singularidad**

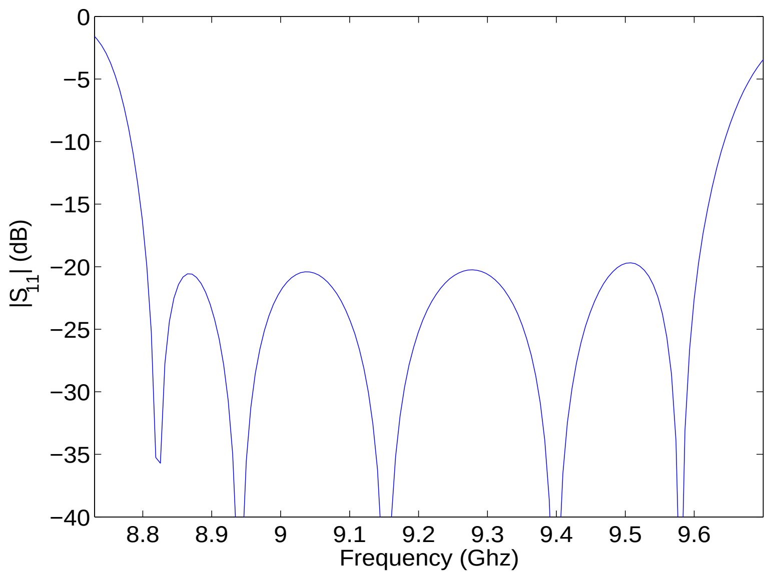


# 9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

## Gu´ı a de ondas con cinco ´ı rises

**Geometrí a de un corte transversal de la guí a de ondas rectangular**






**Cantidad de energ´ı a reflejada**

**Cinco í rises resonantes en el plano H.**

**Modo dominante (fuente): $TE_{10}$.**

**Dimensiones $\approx 20 \times 2 \times 1$ cm.**

**Frecuencias de interés: $\approx 8{,}8 - 9{,}6$ Ghz**

**Frecuencia de corte: $\approx 6{,}56$ Ghz**

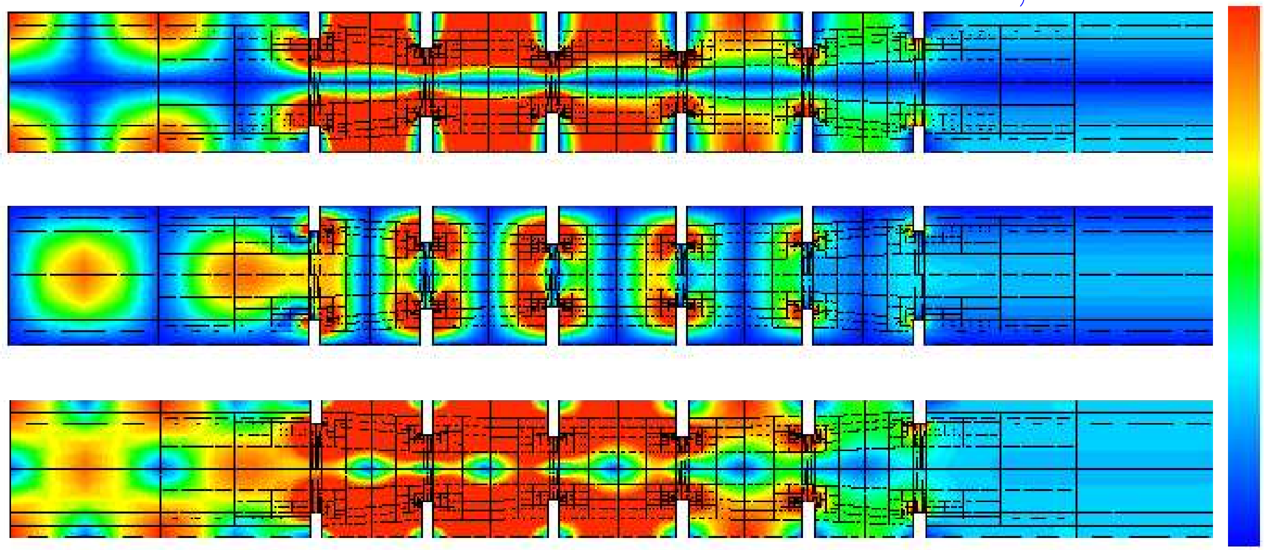
# 9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

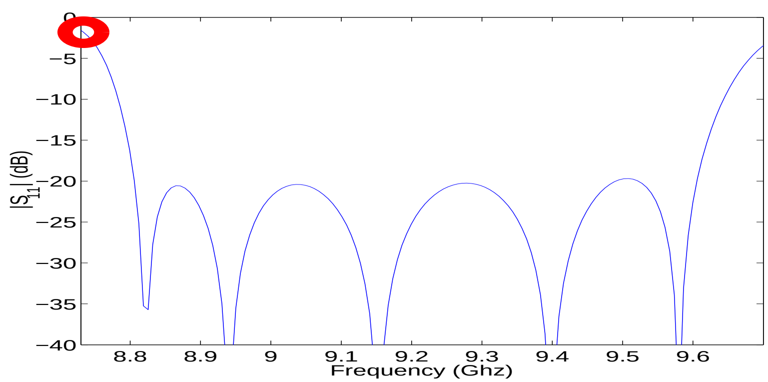
## Solución de Elementos Finitos con frecuencia $= 8{,}72$ Ghz

$|H_x|$

$|H_y|$

$\sqrt{|H_x|^2+|H_y|^2}$





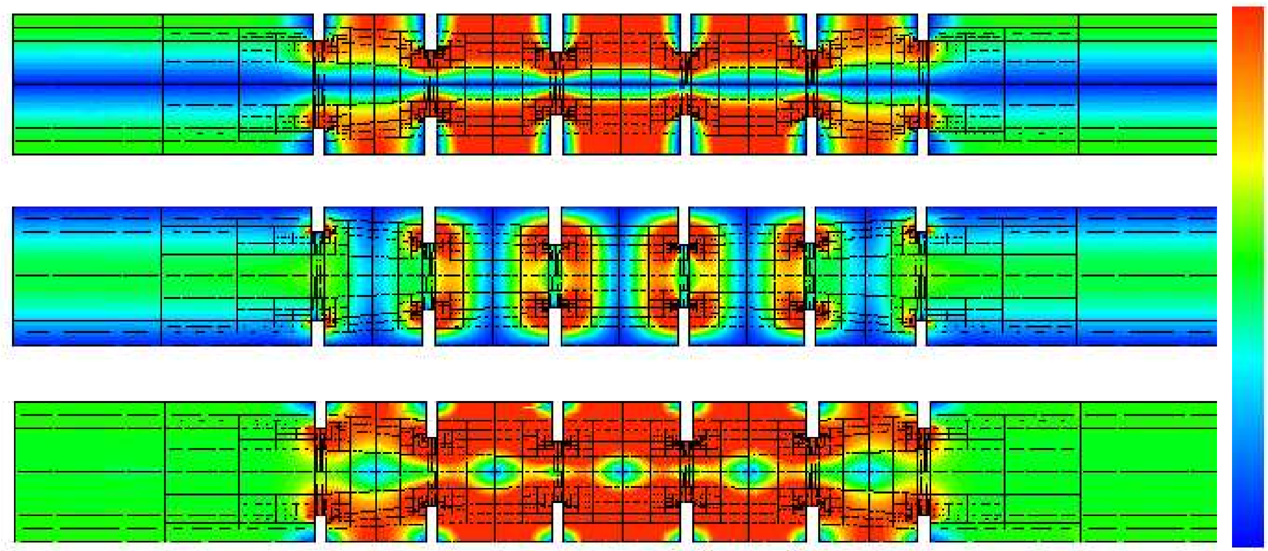
# 9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

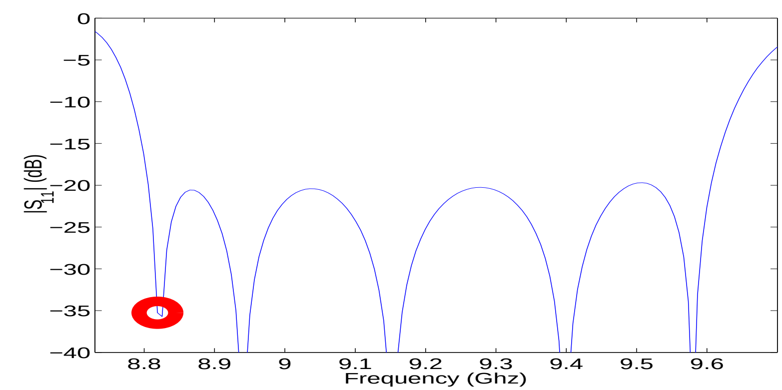
## Solución de Elementos Finitos con frecuencia $= 8{,}82$ Ghz

$|H_x|$

$|H_y|$

$\sqrt{|H_x|^2+|H_y|^2}$





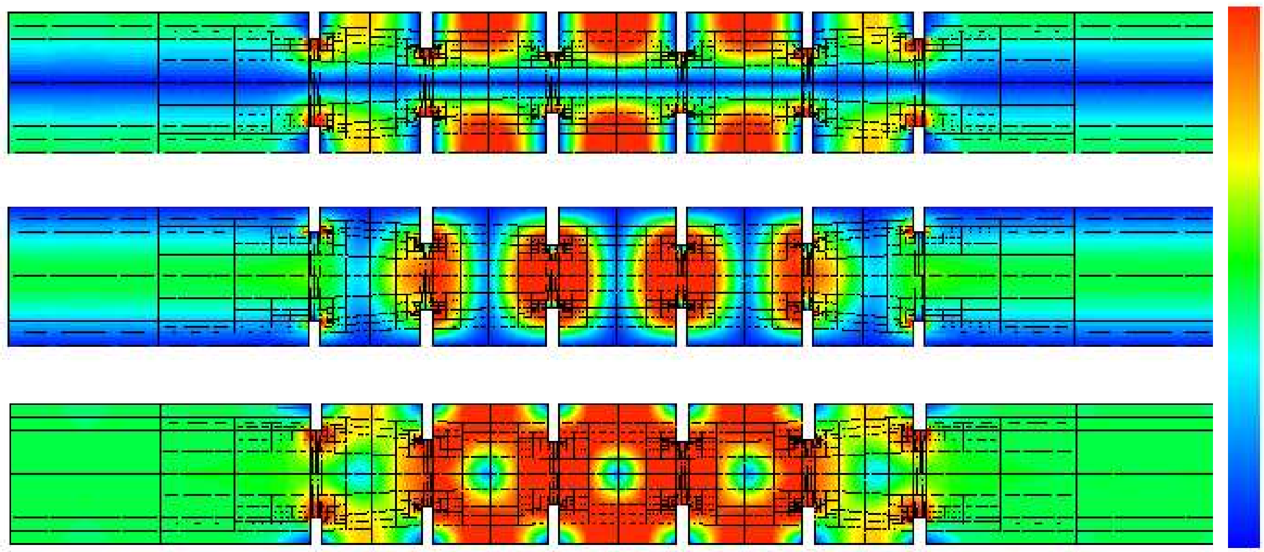
# 9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

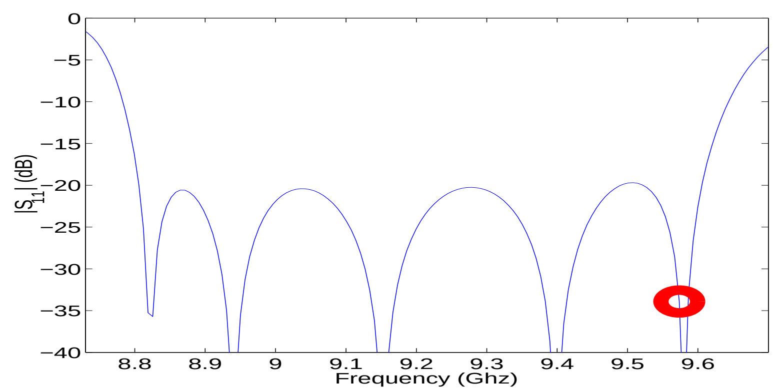
## Solución de Elementos Finitos con frecuencia $= 9{,}58$ Ghz

$|H_x|$

$|H_y|$

$\sqrt{|H_x|^2+|H_y|^2}$





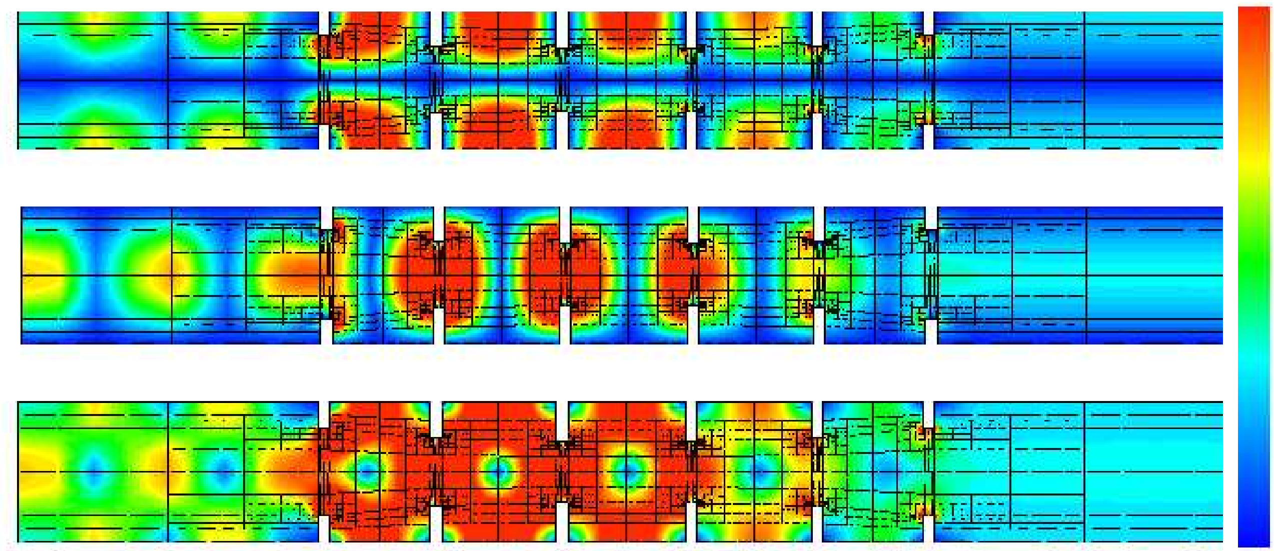
# 9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

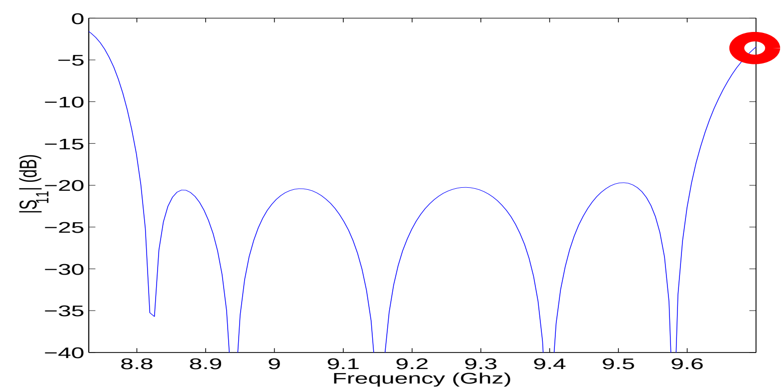
## Solución de Elementos Finitos con frecuencia $= 9{,}71$ Ghz

$|H_x|$

$|H_y|$

$\sqrt{|H_x|^2+|H_y|^2}$



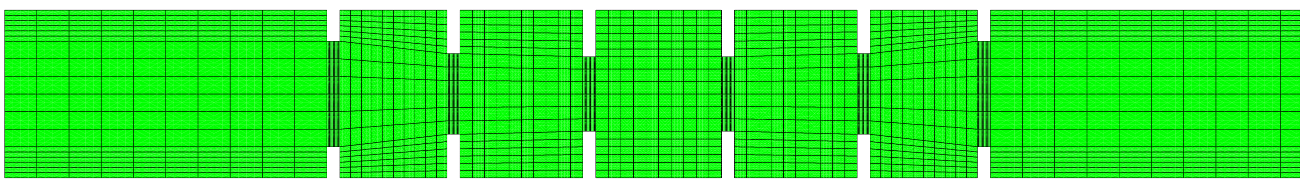


# 9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

## Técnicas de mallado en el problema de guía de ondas

**Nuestra tecnología de refinamientos automáticos incorpora:**

| Refinamientos en $hp$ | Resolvedor de dos mallas |
| --- | --- |
| **Controlar el error de dispersión** | **Convergencia del método iterativo** |
| $h$ pequeño no es suficiente | No depende de $p$ $(1 \leq p \leq 4)$ |
| Es necesario $p$ grande | Malla gruesa suficientemente fina |
| Guía de ondas: $p \approx 3$ | Guía de ondas: $\lambda / h \approx 9$ |



**Limitaciones de la estrategia de refinamientos en $hp$ para problemas de propagación de ondas:**

## Necesitamos $p$ grande y $h$ pequeño.

# 9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

## Técnicas de mallado en el problema de guí a de ondas

**Queremos investigar si la convergencia o no del resolvedor de dos mallas depende de $p$ o $h$, y cuál es el tipo de dependencia.**

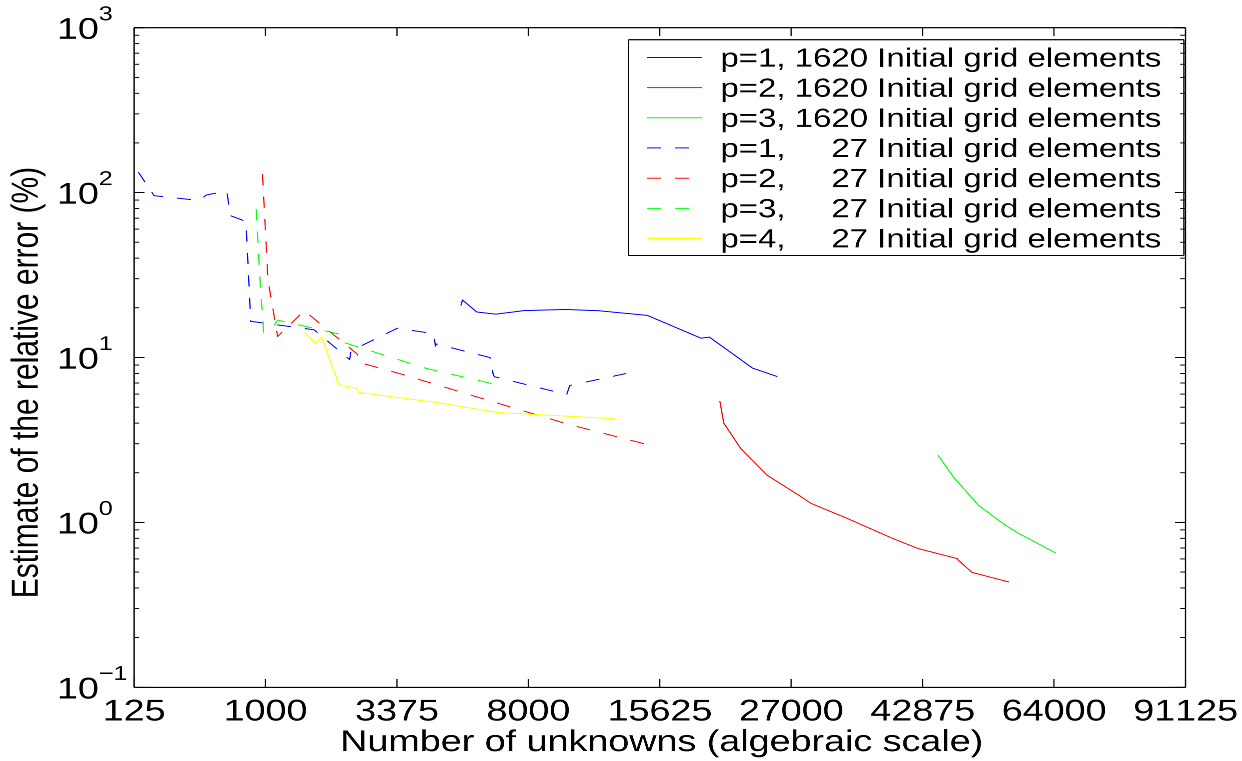
| ¿Converge el resolvedor? | $p = 1$ | $p = 2$ | $p = 3$ | $p = 4$ |
|---|---|---|---|---|
| Num. de elementos por $\lambda = 7, 13$ | SÍ | SÍ | SÍ | SÍ |
| Num. de elementos por $\lambda = 7, 11$ | NO | NO | NO | SÍ |
| Num. de elementos por $\lambda = 6, 13$ | NO | NO | NO | NO |

**Convergencia (o no) del resolvedor de dos mallas NO depende de $p$.**

# 9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

## Técnicas de mallado en el problema de guí a de ondas

**Convergencia utilizando distintos mallados iniciales**

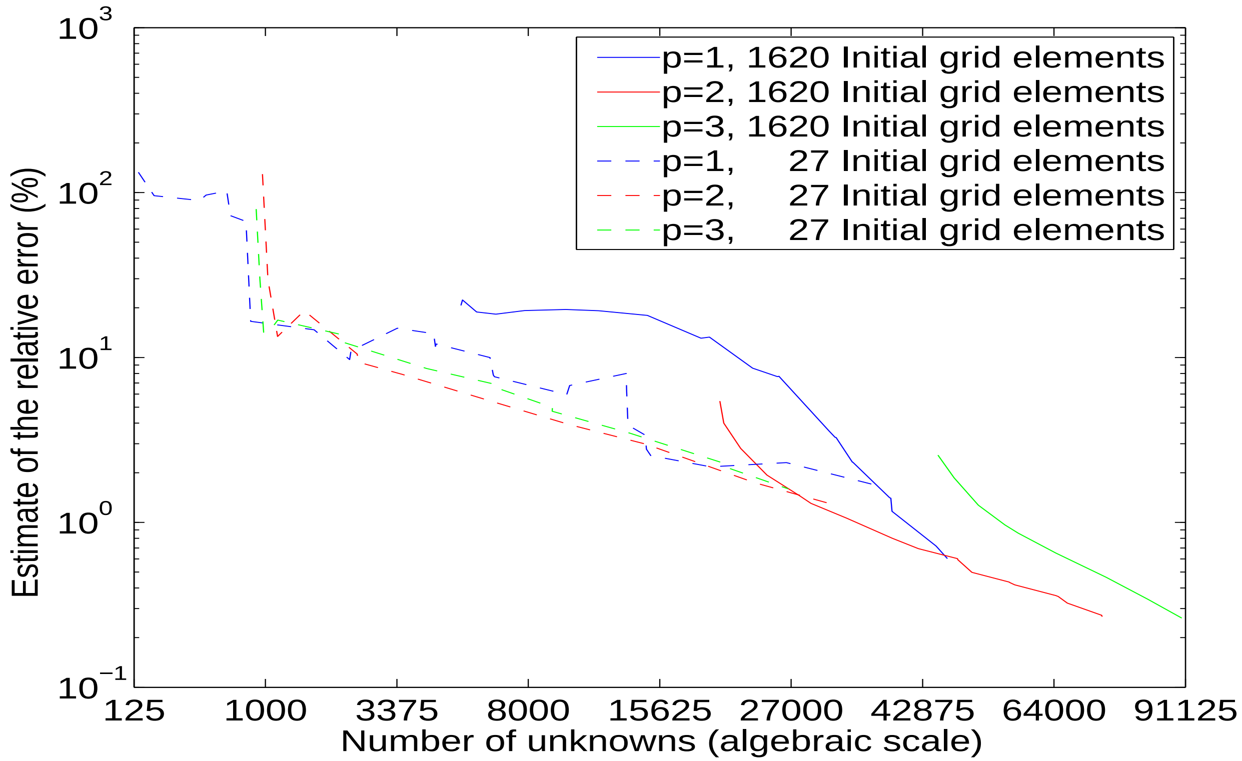



**Conclusión : Debemos controlar el error de dispersión.**

# 9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

## Técnicas de mallado en el problema de guí a de ondas

**Convergencia utilizando distintos mallados iniciales**




**Conclusión :** **¿Tenemos que controlar el error de dispersión?**

# 10. CONCLUSIONES

- **Utilizando el método de refinamientos automáticos en $hp$, obtenemos convergencia exponencial.**
- **Un resolvedor de dos mallas es un método iterativo eficiente aplicable a mallados NO uniformes en $hp$.**
- **Es posible guiar refinamientos automáticos en $hp$ con una solución en la malla fina que sólo ha convergido parcialmente.**
- **Existe un compromiso en el diseño del mallado inicial entre elegir $p$ grande y $h$ pequeño.**
- **El método numérico presentado es aplicable a una gran variedad de problemas electromagnéticos de interés.**