

**Estrategia de Refinamientos Automáticos *hp*
Integrada con un Resolvedor de Dos Mallas:
Aplicaciones al Electromagnetismo**

David Pardo Zubiaur

dzubiaur@yahoo.es

Supervisores: L. Demkowicz, C. Torres-Verdin, L. Tabarovski

Otros colaboradores: L.E. García Castillo, W. Rachowicz, A. Zdunek,
D. Xue, J. Kurtz, M. Paszynski

Universidad del País Vasco

3 de Junio 2004

**Institute for Computational Engineering and Sciences (ICES)
Universidad de Tejas en Austin**

TABLA DE CONTENIDOS

1. Universidad de Tejas en Austin.
2. Motivación.
3. Ecuaciones de Maxwell.
4. Elementos Finitos *hp*.
5. Estrategia de Refinamientos Automáticos en *hp*.
6. Resolvedor de Dos Mallas.
7. Aplicaciones al Electromagnetismo.
8. Conclusiones.
9. Posibles Líneas de Investigación.

1. UNIVERSIDAD DE TEJAS EN AUSTIN

TEJAS



Everything is bigger in Texas

1. UNIVERSIDAD DE TEJAS EN AUSTIN

TEJAS



1. UNIVERSIDAD DE TEJAS EN AUSTIN

AUSTIN



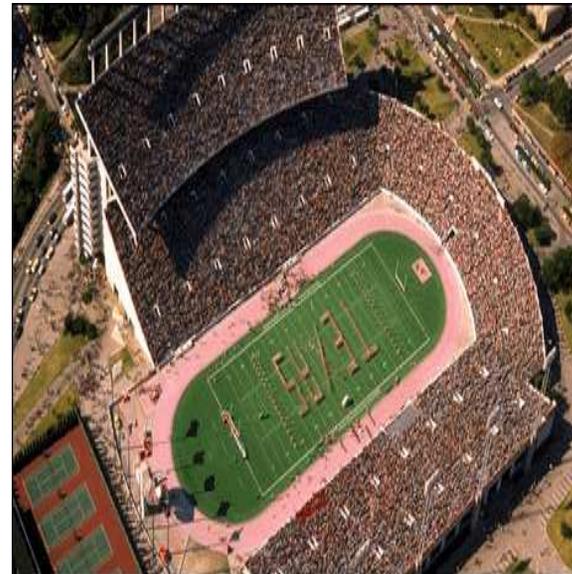
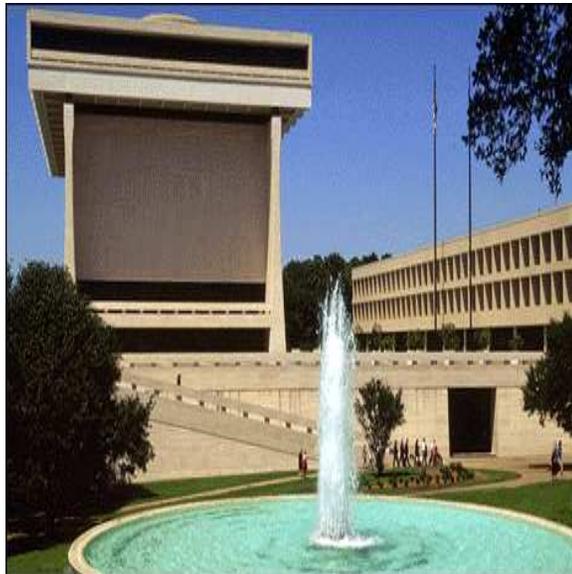
1. UNIVERSIDAD DE TEJAS EN AUSTIN

Universidad de Tejas en Austin



1. UNIVERSIDAD DE TEJAS EN AUSTIN

Universidad de Tejas en Austin



1. UNIVERSIDAD DE TEJAS EN AUSTIN

Institute for Computational Engineering and Sciences (ICES)

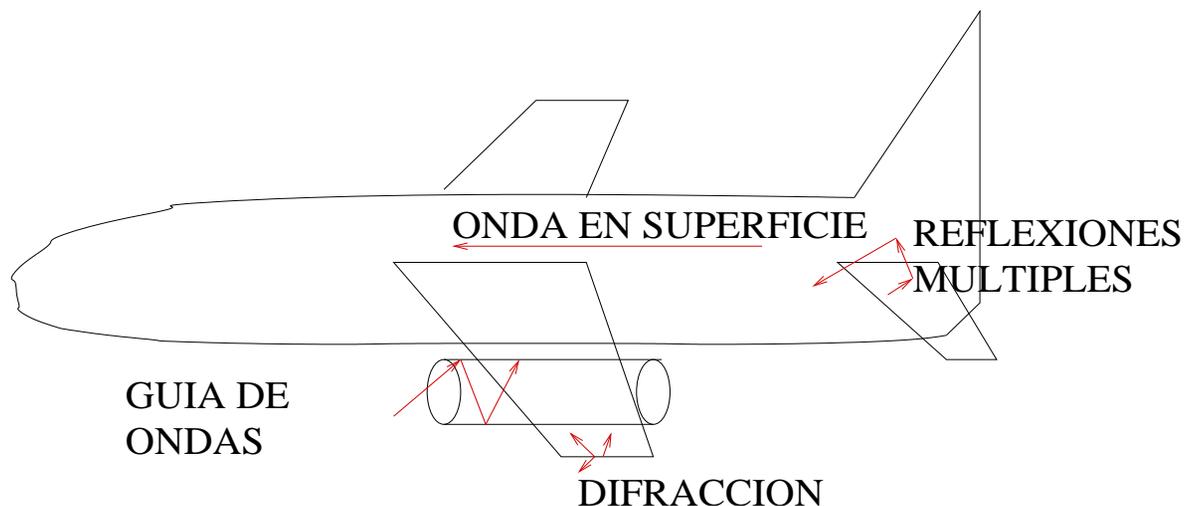


Programa Interdisciplinar

- 1/3 Matemáticas
- 1/3 Métodos Numéricos (Informática)
- 1/3 Ingeniería

2. MOTIVACIÓN

Análisis de la Sección Radar

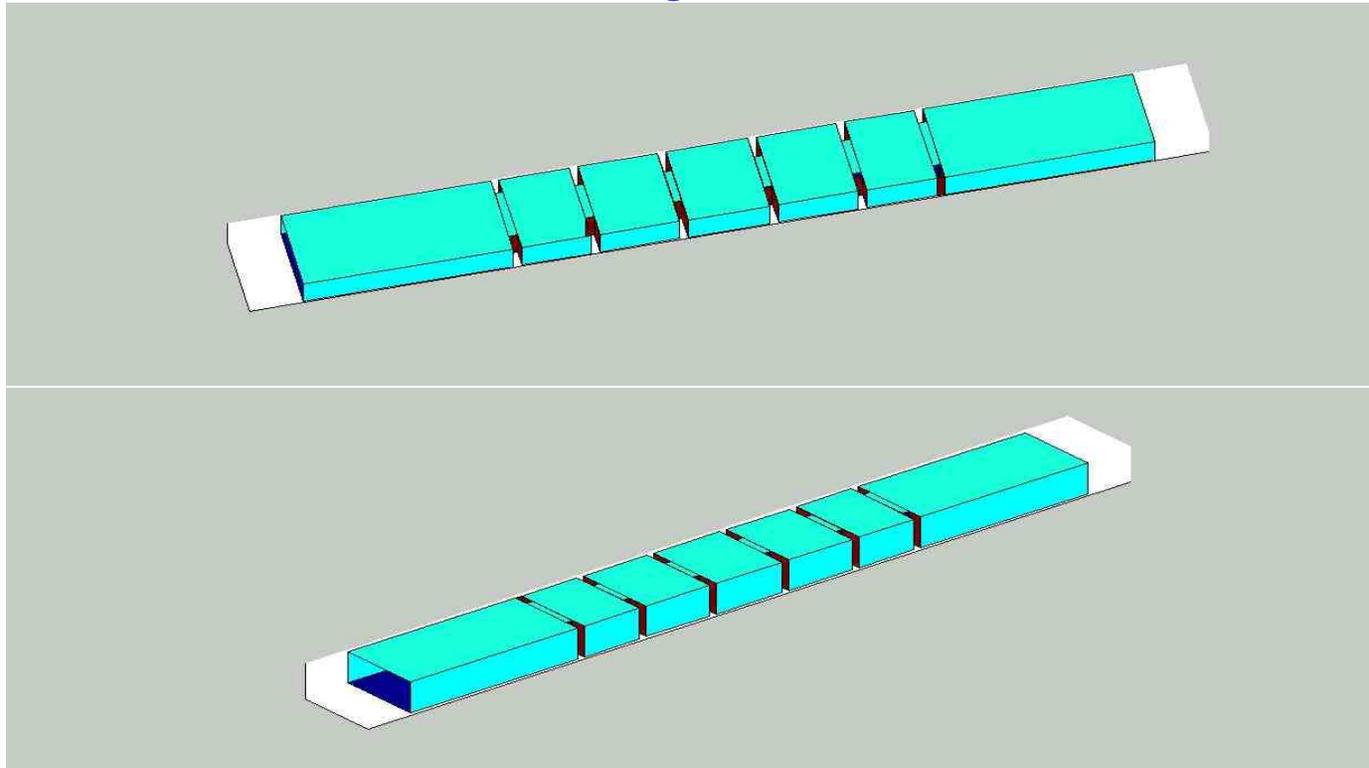


$$\text{RCS} = 4\pi \frac{\text{Energía reflejada con respecto al ángulo}}{\text{Energía incidente}} = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|E^s|}{|E^i|}$$

Objetivo: Determinación de la sección radar del avión.

2. MOTIVACIÓN

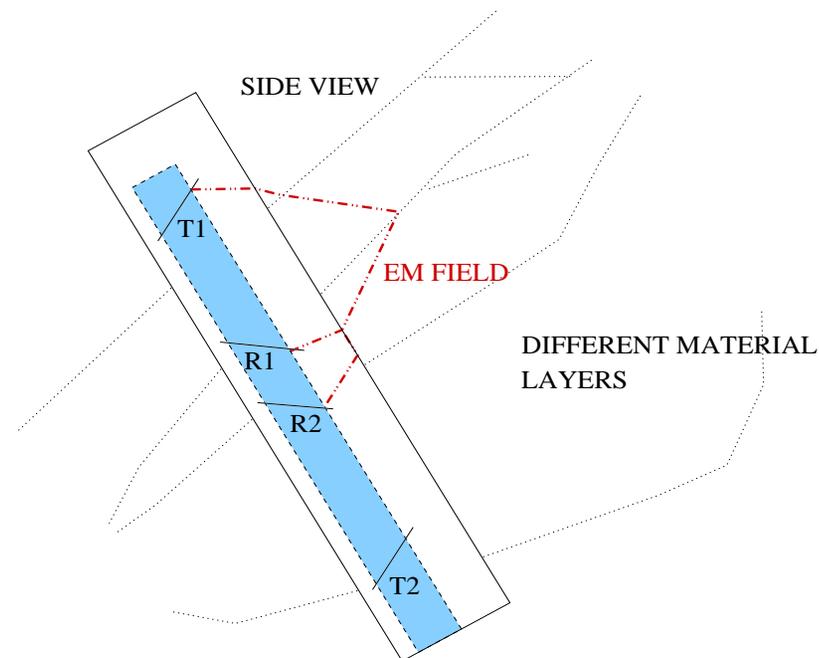
Diseño de guía de ondas



Objetivo: Determinación de la intensidad del campo eléctrico en los puertos de entrada y/o salida.

2. MOTIVACIÓN

Diseño de herramientas electromagnéticas para la perforación de pozos petrolíferos



Objetivo: Determinación del campo electromagnético en las antenas receptoras.

3. ECUACIONES DE MAXWELL

Ecuaciones de Maxwell en el Dominio de la Frecuencia:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\mu\omega\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}^{imp}$$

Ecuación de Onda (Reducida):

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) - (\omega^2\epsilon - j\omega\sigma)\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{J}^{imp},$$

Condiciones en la Frontera:

- Dirichlet:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^s = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{inc}$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$$

- Neumann:

$$\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}^s = -\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}^{inc}$$

$$\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{J}_S^{imp}$$

- Condición de radiación de Silver Müller en ∞ :

$$\mathbf{e}_r \times (\nabla \times \mathbf{E}^s) - jk_0 \times \mathbf{E}^s = O(r^{-2})$$

3. ECUACIONES DE MAXWELL

Formulación Variacional

Ecuación de onda (reducida) en Ω ,

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times E \right) - (\omega^2 \epsilon - j\omega\sigma)E = -j\omega J^{imp},$$

Formulación Variacional:

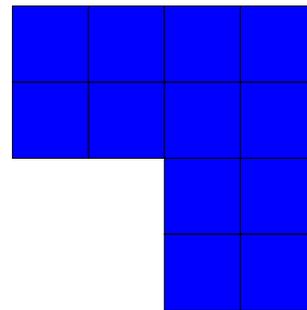
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } E \in H_D(\text{curl}; \Omega) \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} (\nabla \times E) \cdot (\nabla \times \bar{F}) dx - \int_{\Omega} (\omega^2 \epsilon - j\omega\sigma) E \cdot \bar{F} dx = \\ -j\omega \left\{ \int_{\Omega} J^{imp} \cdot \bar{F} dx + \int_{\Gamma_2} J_S^{imp} \cdot \bar{F} dS \right\} \end{array} \right. \text{ para todo } F \in H_D(\text{curl}; \Omega).$$

Formulación Variacional estabilizada (usando un *Multiplicador de Lagrange*):

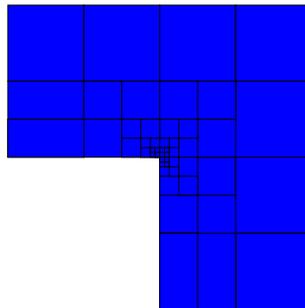
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } E \in H_D(\text{curl}; \Omega), p \in H_D^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} (\nabla \times E) \cdot (\nabla \times \bar{F}) dx - \int_{\Omega} (\omega^2 \epsilon - j\omega\sigma) E \cdot \bar{F} dx - \int_{\Omega} (\omega^2 \epsilon - j\omega\sigma) \nabla p \cdot \bar{F} dx = \\ -j\omega \left\{ \int_{\Omega} J^{imp} \cdot \bar{F} dx + \int_{\Gamma_2} J_S^{imp} \cdot \bar{F} dS \right\} \quad \forall F \in H_D(\text{curl}; \Omega) \\ - \int_{\Omega} (\omega\epsilon - j\sigma) E \cdot \nabla \bar{q} dx = -j \left\{ \int_{\Omega} J^{imp} \cdot \nabla \bar{q} dx + \int_{\Gamma_2} J_S^{imp} \cdot \nabla \bar{q} dS \right\} \quad \forall q \in H_D^1(\Omega). \end{array} \right.$$

4. ELEMENTOS FINITOS EN HP

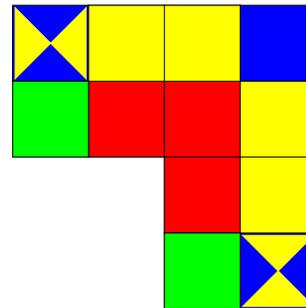
Diferentes tipos de refinamientos en elementos finitos:



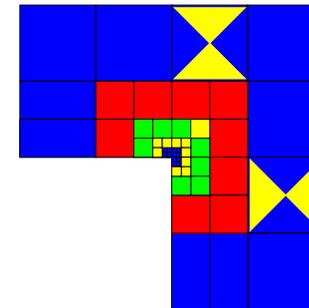
Malla inicial



Malla refinada en h



Malla refinada en p



Malla refinada en hp

4. REFINAMIENTOS (ADAPTATIVIDAD) EN HP

Produce Convergencia Exponencial
en problemas CON y sin singularidades

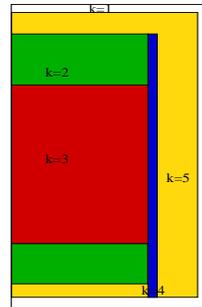
si el mallado es óptimo en hp , tanto
en el régimen asintótico (resultados teóricos y numéricos), como
en el régimen preasintótico (resultados numéricos).

El error de dispersión es más pequeño
a medida que p incrementa.

Es posible reproducir más detalles geométricos
a medida que el tamaño h de cada elemento disminuye.

4. REFINAMIENTOS (ADAPTATIVIDAD) EN HP

Ecuación del calor NO isotrópica

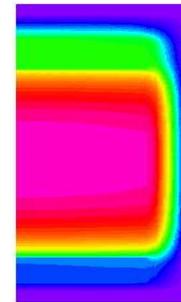


Ecuación: $\nabla(K\nabla u) = f^{(k)}$

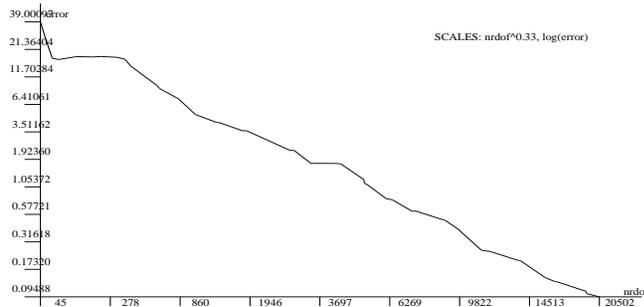
$$K = K^{(k)} = \begin{bmatrix} K_x^{(k)} & 0 \\ 0 & K_y^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$K_x^{(k)} = (25, 7, 5, 0,2, 0,05)$$

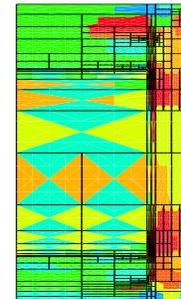
$$K_y^{(k)} = (25, 0,8, 0,0001, 0,2, 0,05)$$



Solución: Desconocida
 Condiciones en la Frontera:
 $K^{(i)} \nabla u \cdot n = g^{(i)} - \alpha^{(i)} u$



Convergencia exponencial
 (tolerancia en el error= 0.1 %)

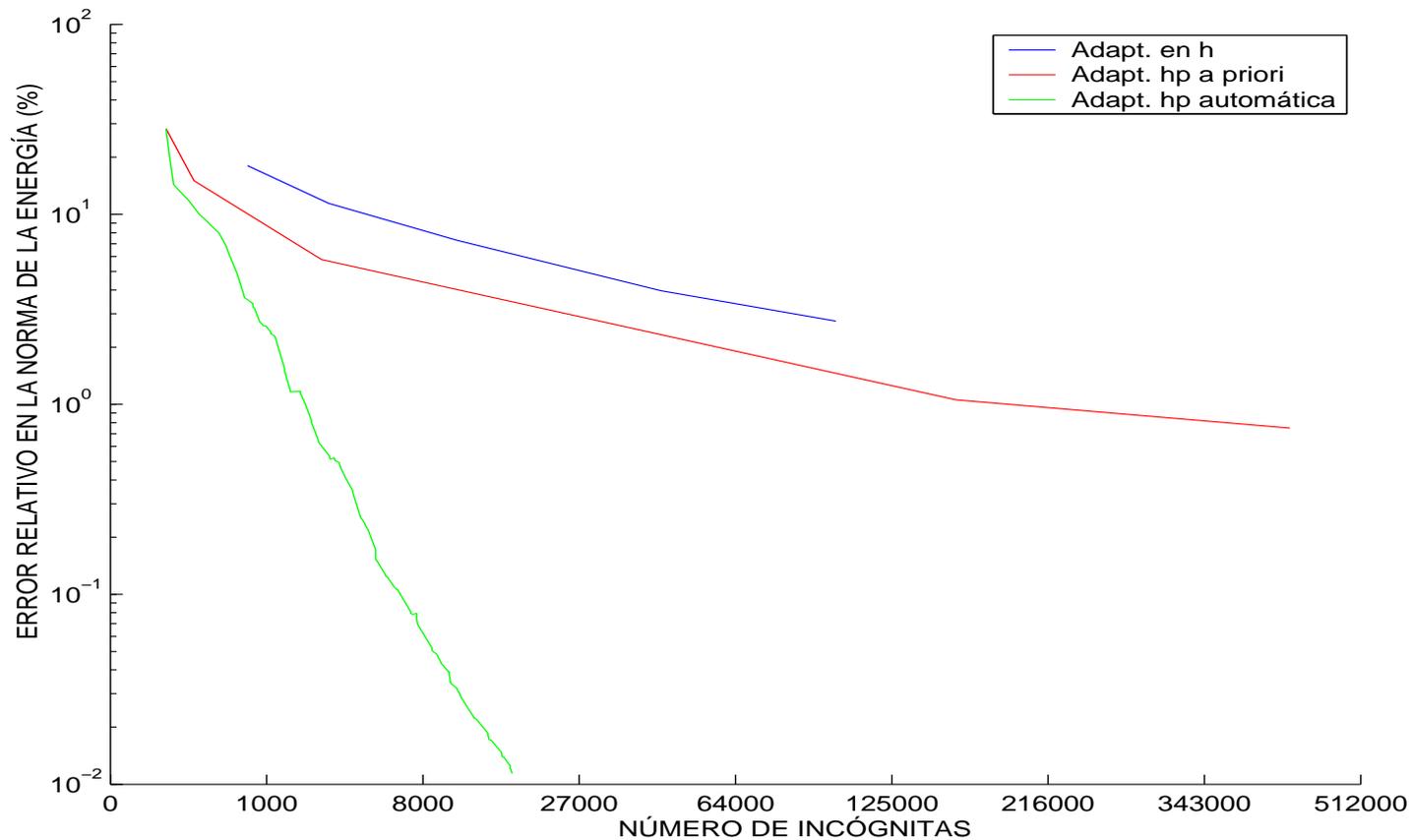


Mallado hp óptimo

4. REFINAMIENTOS (ADAPTATIVIDAD) EN *HP*

Convergencia usando distintos tipos de refinamientos

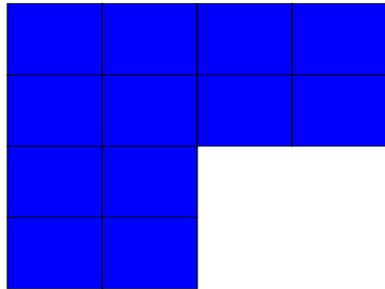
Ecuación del calor NO isotrópica



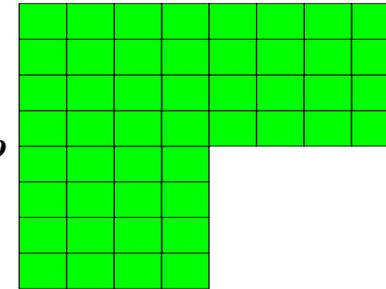
5. REFINAMIENTOS AUTOMÁTICOS EN HP

Refinamientos automáticos en hp

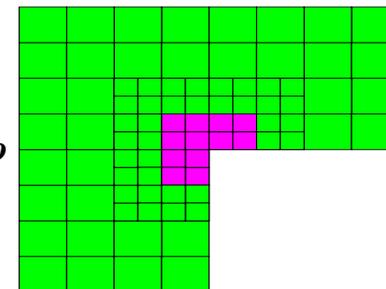
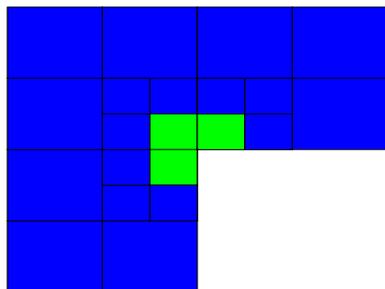
Mallas gruesas
(hp)



Mallas finas
($h/2, p + 1$)



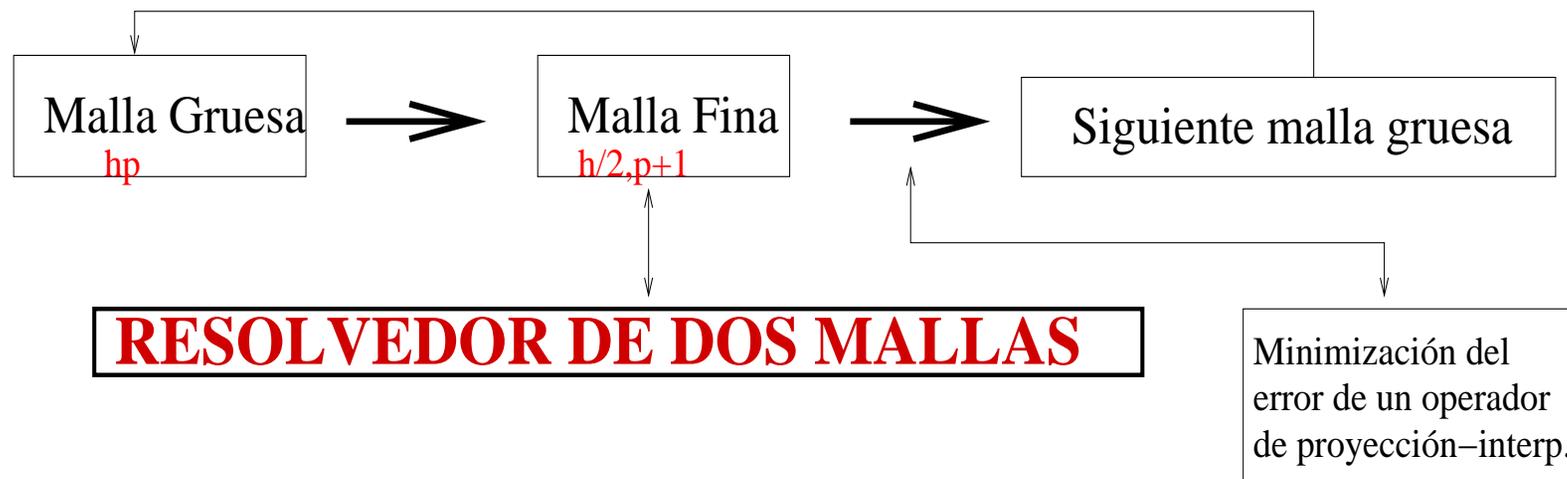
Refinamiento global hp



Refinamiento global hp

5. REFINAMIENTOS AUTOMÁTICOS EN HP

La estrategia de refinamientos automáticos en hp converge exponencialmente, permitiendo obtener soluciones muy precisas de problemas electromagnéticos complejos.



RESOLV. DE DOS MALLAS-ELECTROSTÁTICA

Buscamos x tal que $Ax = b$. Usando iteraciones de Richardson:

$$\begin{aligned} r^{(n+1)} &= [I - \alpha^{(n)} AS]r^{(n)} \\ x^{(n+1)} &= x^{(n)} + \alpha^{(n)} S r^{(n)} \end{aligned}$$

donde S es una matriz, y $\alpha^{(n)}$ un parámetro de relajación. $\alpha^{(n)}$ **óptimo** si:

$$\alpha^{(n)} = \arg \min \| x^{(n+1)} - x \|_A = \frac{(A^{-1}r^{(n)}, S r^{(n)})_A}{(S r^{(n)}, S r^{(n)})_A}$$

Así, definimos nuestro resolvidor de dos mallas como:

$$\begin{aligned} &1 \text{ iteración con } S = S_F = \sum A_i^{-1} \quad + \\ &1 \text{ iteración con } S = S_C = P_C A_C^{-1} R_C \end{aligned}$$

RESOLV. DE DOS MALLAS-ELECTRODINÁMICA

$$\text{Ecuación de onda: } \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = \mathbf{J}$$

Indefnido

1) Consideramos el siguiente problema auxiliar:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{J}$$

2) Aplicamos un resultado clásico de Cai and Widlund.

Teorema. Si la malla gruesa es **suficientemente fina**:

Las propiedades de convergencia del resolvedor multimalla asociado al problema original y auxiliar son idénticas excepto por un término $Ch \rightarrow 0$.

Núcleo (curl)

1) Consideramos:

$$\mathbf{M} \subset H(\text{curl}), \mathbf{W} \subset H^1$$

2) Tenemos: $\text{Ker}(\nabla \times \mathbf{M}) = \nabla \mathbf{W}$

3) Hiptmair: $\mathbf{M} = \sum_e \mathbf{M}_e + \sum_v \nabla \mathbf{W}_v$

4) Arnold: $\mathbf{M} = \sum_v \mathbf{M}_v$

RESOLV. DE DOS MALLAS-ELECTRODINÁMICA

Buscamos x tal que $Ax = b$. Usando iteraciones de Richardson:

$$\begin{aligned} r^{(n+1)} &= [I - \alpha^{(n)} AS]r^{(n)} \\ x^{(n+1)} &= x^{(n)} + \alpha^{(n)} S r^{(n)} \end{aligned}$$

donde S es una matriz, y $\alpha^{(n)}$ un parámetro de relajación. $\alpha^{(n)}$ óptimo si:

$$\alpha^{(n)} = \arg \min \| x^{(n+1)} - x \|_B = \frac{(A^{-1}r^{(n)}, S r^{(n)})_B}{(S r^{(n)}, S r^{(n)})_B} \quad \text{(NO COMPUTABLE)}$$

Definimos nuestro resolutor de dos mallas para problemas **EM** como:

$$\begin{aligned} &1 \text{ iteración con } S = S_F = \sum A_i^{-1} && + \\ &1 \text{ iteración con } S = S_{\nabla} = \sum G_i^{-1} && + \\ &1 \text{ iteración con } S = S_C = P_C A_C^{-1} R_C \end{aligned}$$

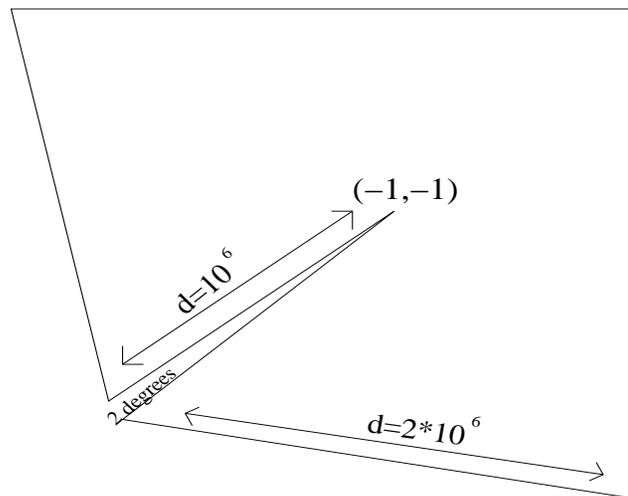
RESOLV. DE DOS MALLAS-ELECTRODINÁMICA

Resultados más importantes

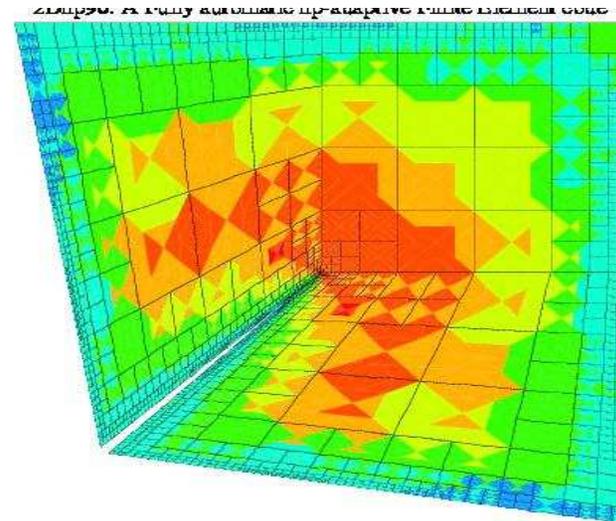
- El número de iteraciones del resolutor de dos mallas es independiente de h , y quizás dependa logarítmicamente de p .
- Hemos incorporado un parámetro de relajación óptimo, un innovador preconditionador de Jacobi por bloques, y hemos desarrollado nuevos estimadores del error.
- Para problemas electrodinámicos es necesario que la malla gruesa sea suficientemente fina.
- Para guiar refinamientos óptimos en hp , basta una solución (proveniente del resolutor de dos mallas) que solo ha convergido parcialmente.

9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

Problema de difracción en una arista (Baker-Hughes): Electroestática

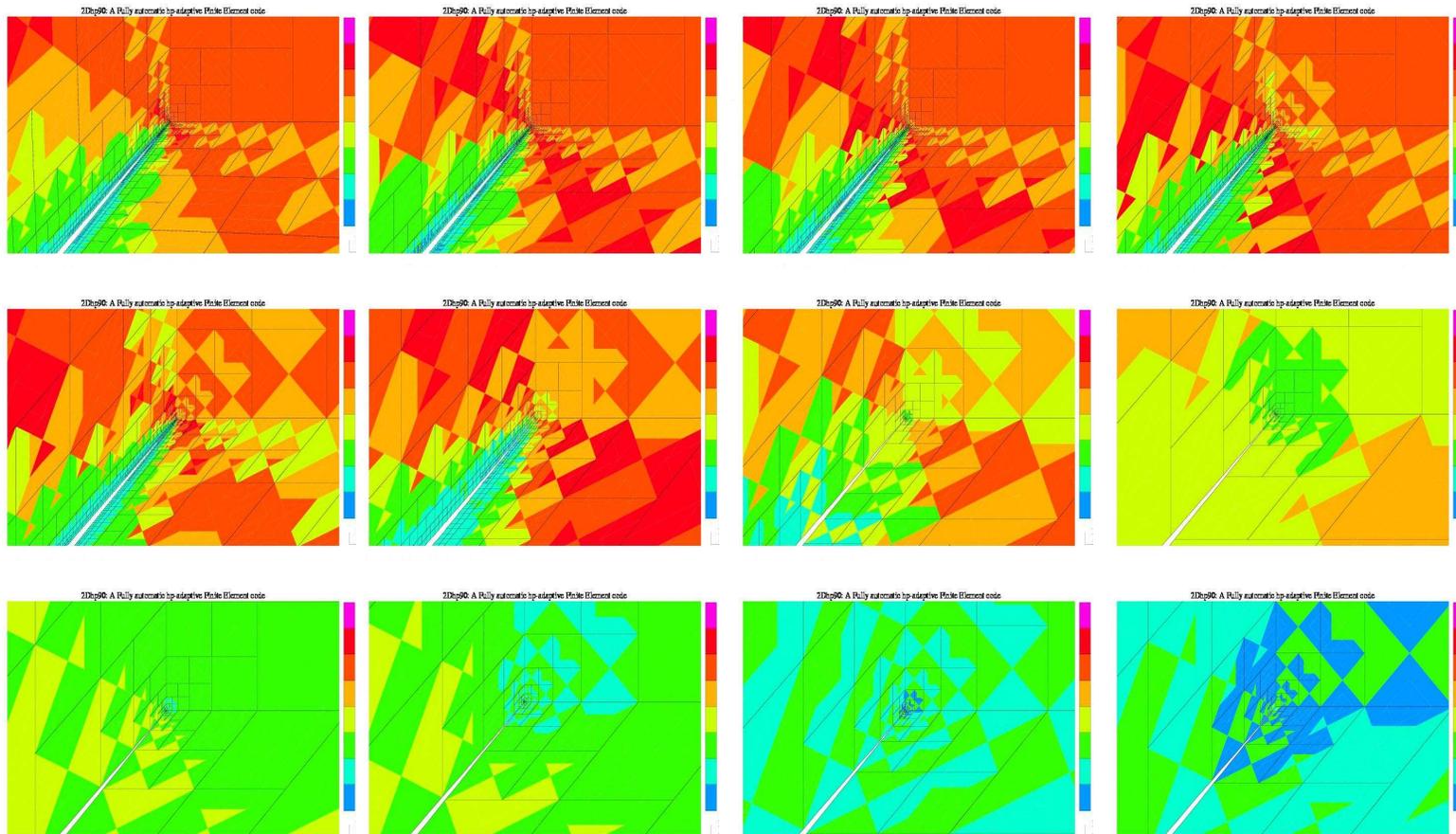


Dirichlet Boundary Conditions
 $u(\text{boundary}) = -\ln r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$



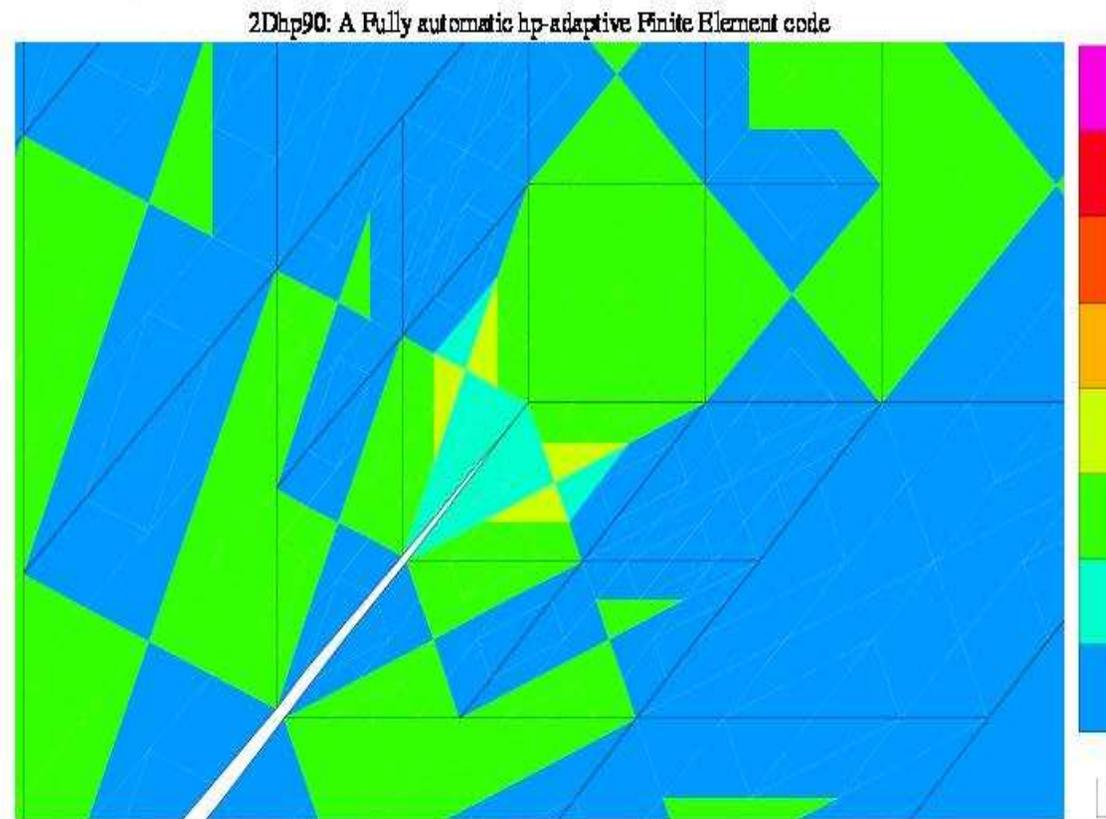
9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

Problema de difracción en una arista : Mallado *hp* óptimo



9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

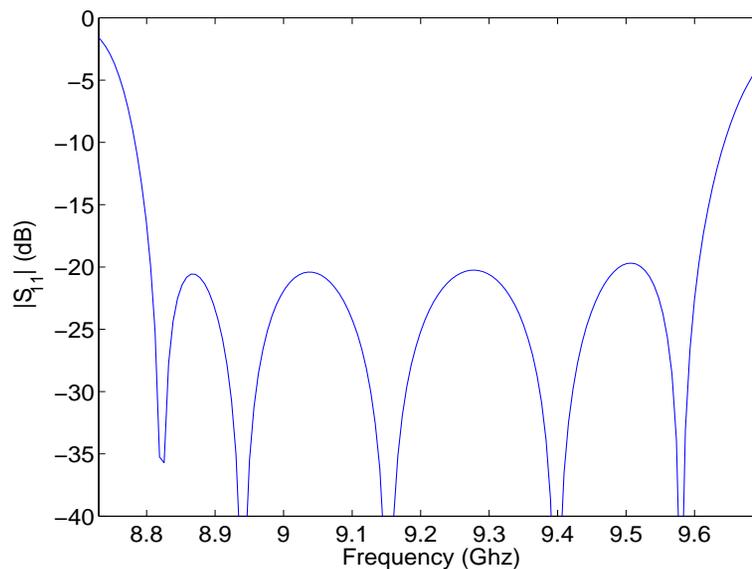
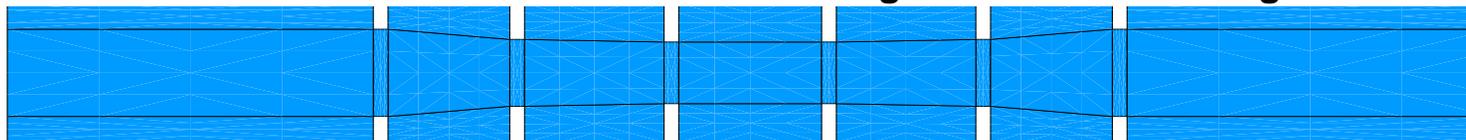
Problema de difracción en una arista : Mallado hp óptimo, zoom = 10^{13}



9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

Guía de ondas con seis íris

Geometría de un corte transversal de la guía de ondas rectangular



Cantidad de energía reflejada

Seis íris resonantes en el plano H.

Modo dominante (fuente): TE_{10} .

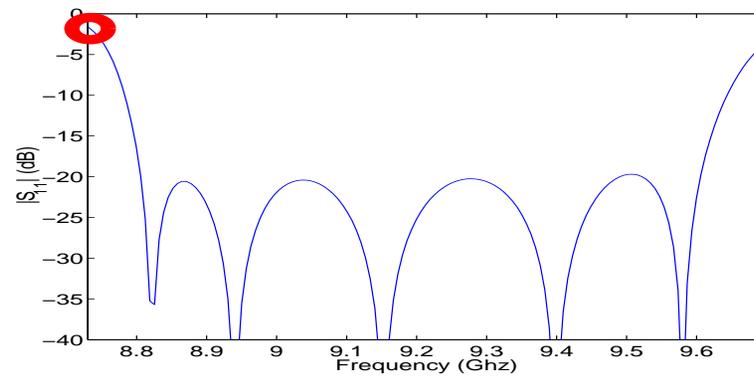
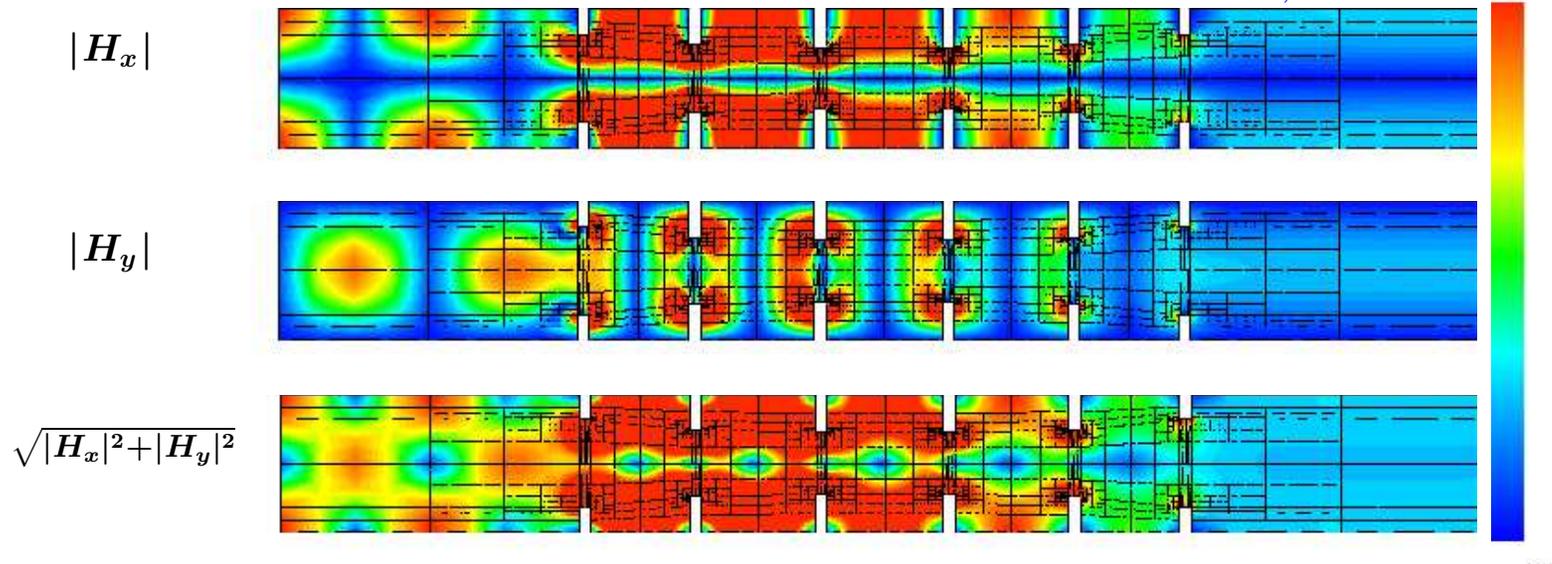
Dimensiones $\approx 20 \times 2 \times 1$ cm.

Frecuencias de interés: $\approx 8,8 - 9,6$ Ghz

Frecuencia de corte: $\approx 6,56$ Ghz

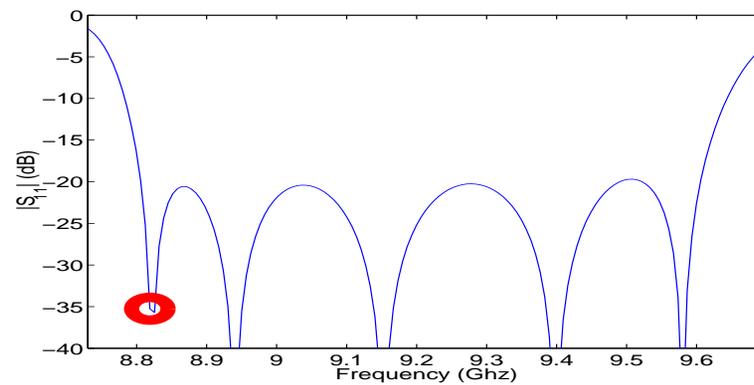
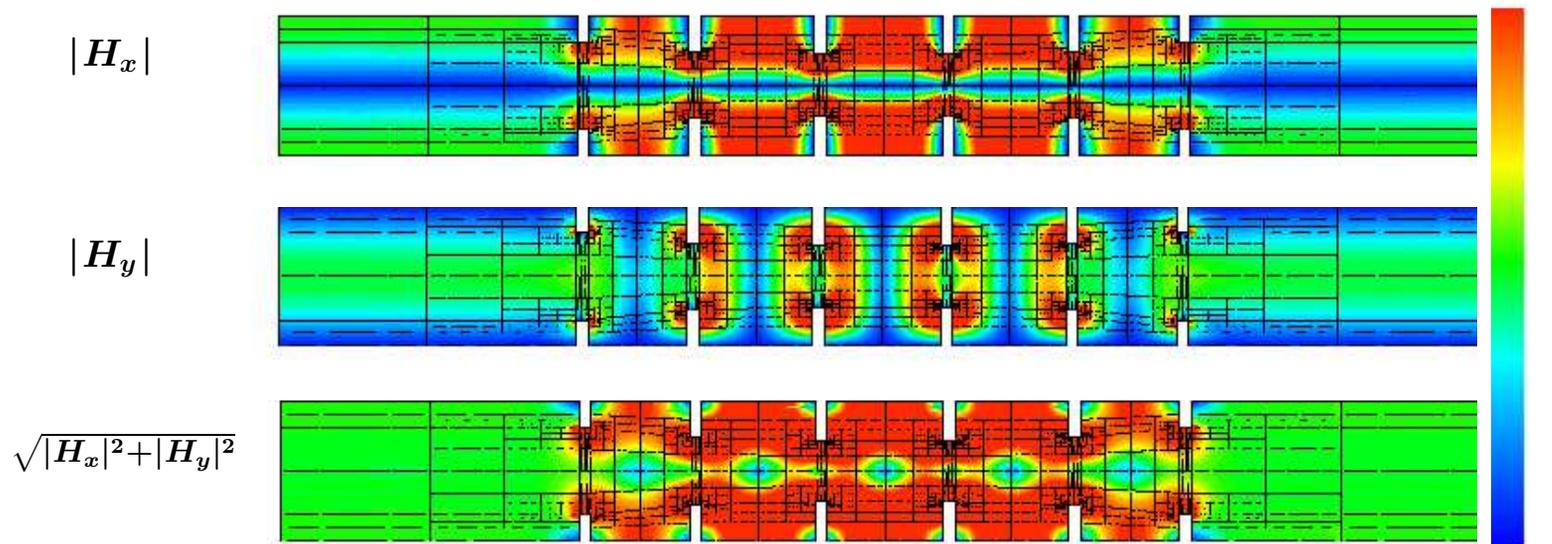
9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

Solución de Elementos Finitos con frecuencia = 8,72 Ghz



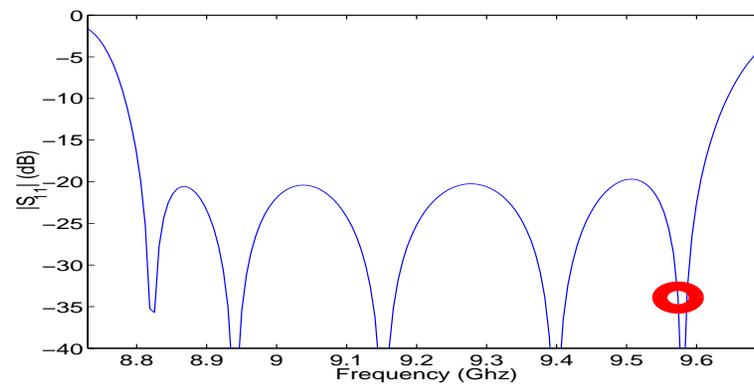
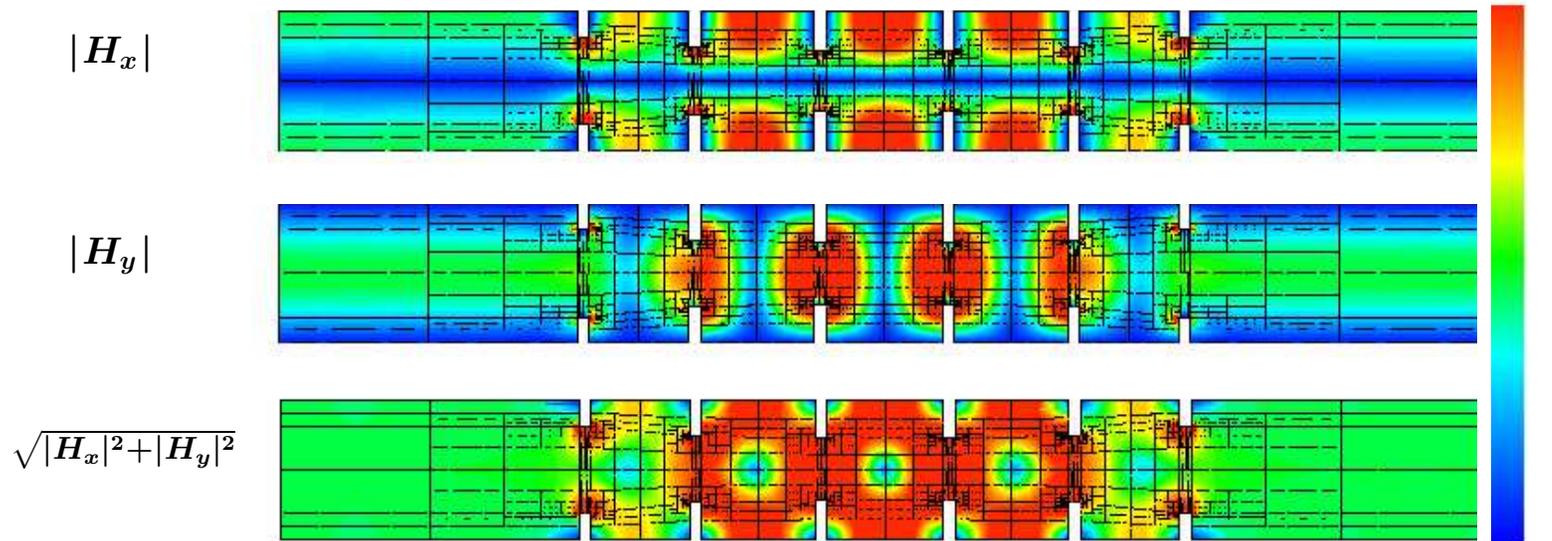
9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

Solución de Elementos Finitos con frecuencia = 8,82 Ghz



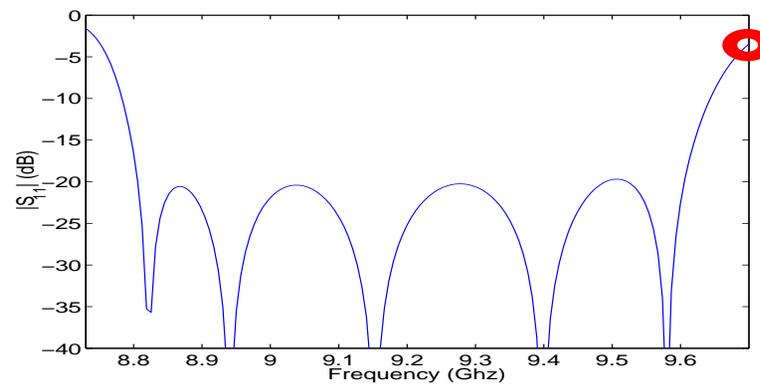
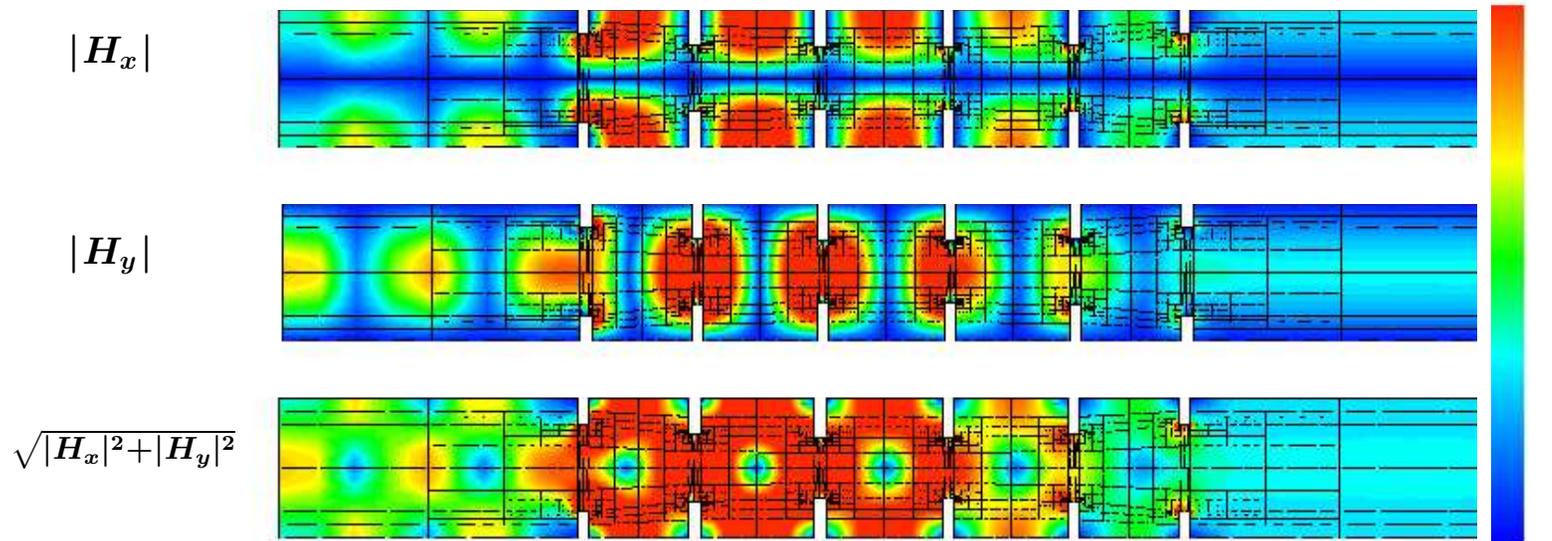
9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

Solución de Elementos Finitos con frecuencia = 9,58 Ghz



9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

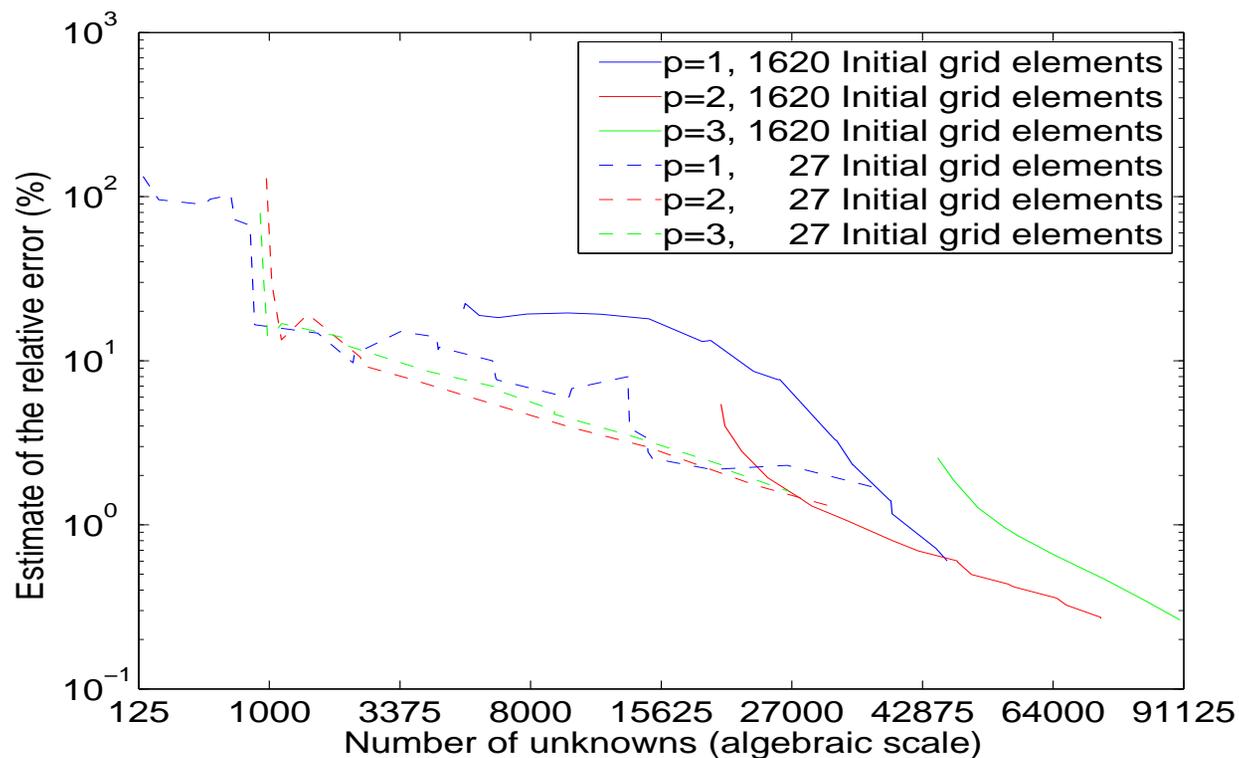
Solución de Elementos Finitos con frecuencia = 9,71 Ghz



9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

Técnicas de mallado en el problema de guía de ondas

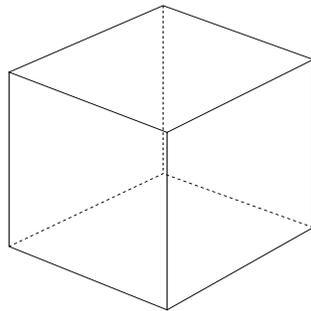
Convergencia utilizando distintos mallados iniciales



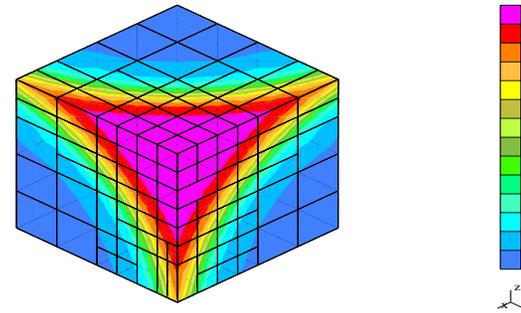
Conclusión : ¿Tenemos que controlar el error de dispersión?

9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

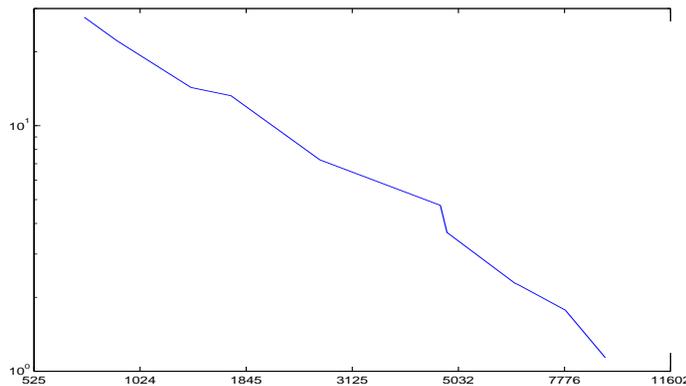
Problema en tres dimensiones (grandes variaciones en los gradientes)



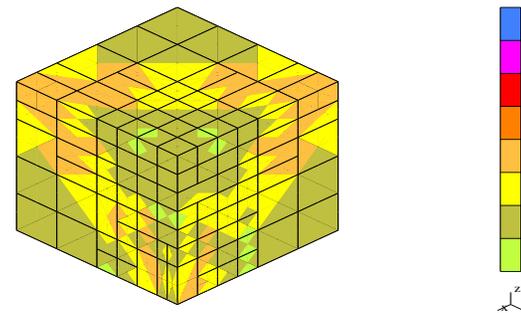
Ecuación: $-\Delta u = f$
 Geometría: $[0, \frac{\pi}{2}]$



Solución: $u = atan(20 * \sqrt{r} - \sqrt{3})$
 $r = (x - ,25) **2 + (y - ,25) **2 + (z - ,25) **2$
 Condiciones en la Frontera: Dirichlet



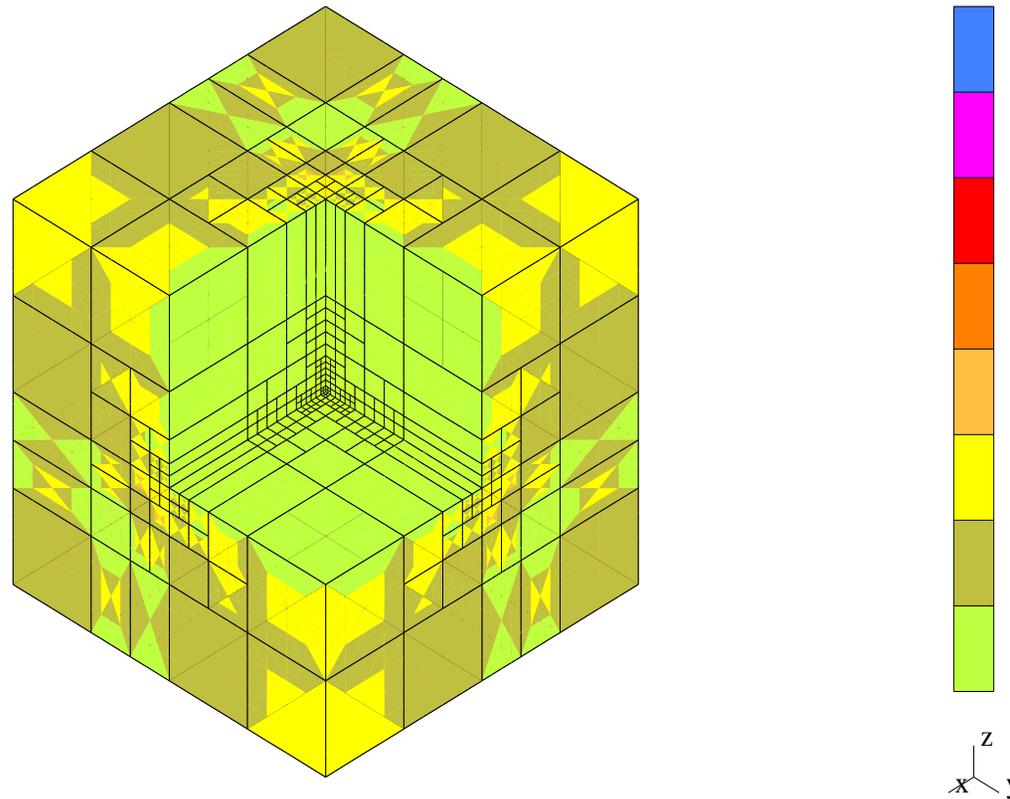
Convergencia exponencial
 (tolerancia en el error= 1%)



Mallado hp óptimo

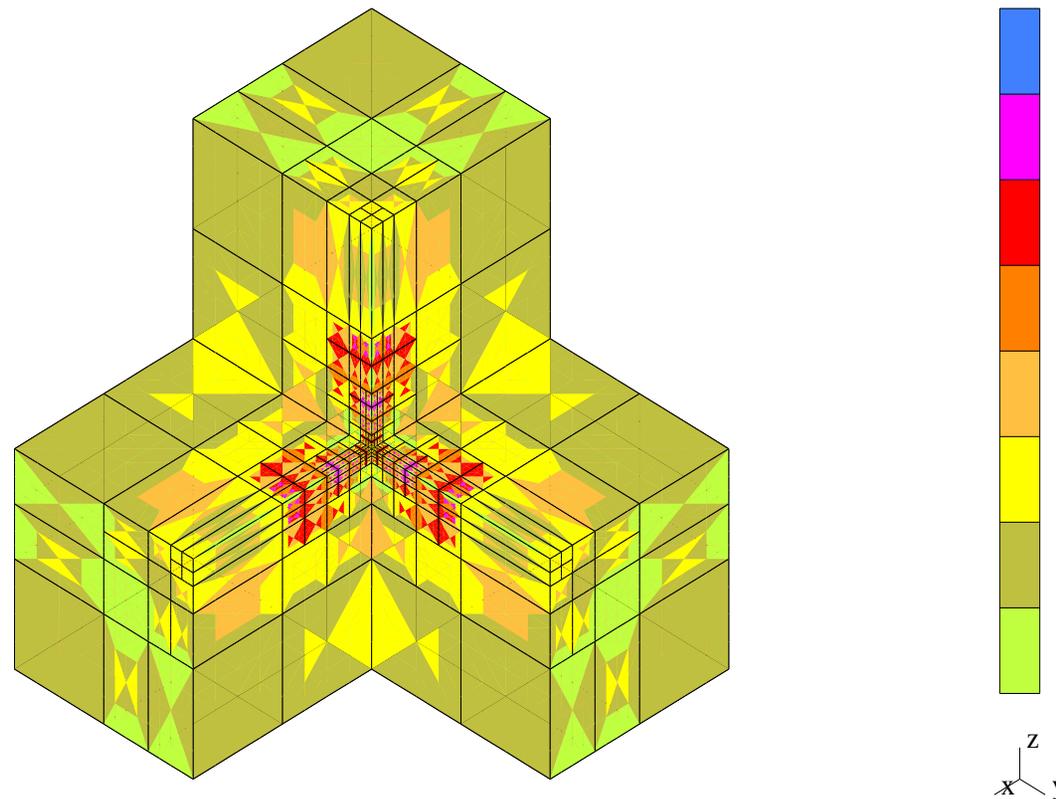
9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

Problema de Fichera. Mallado *hp*.



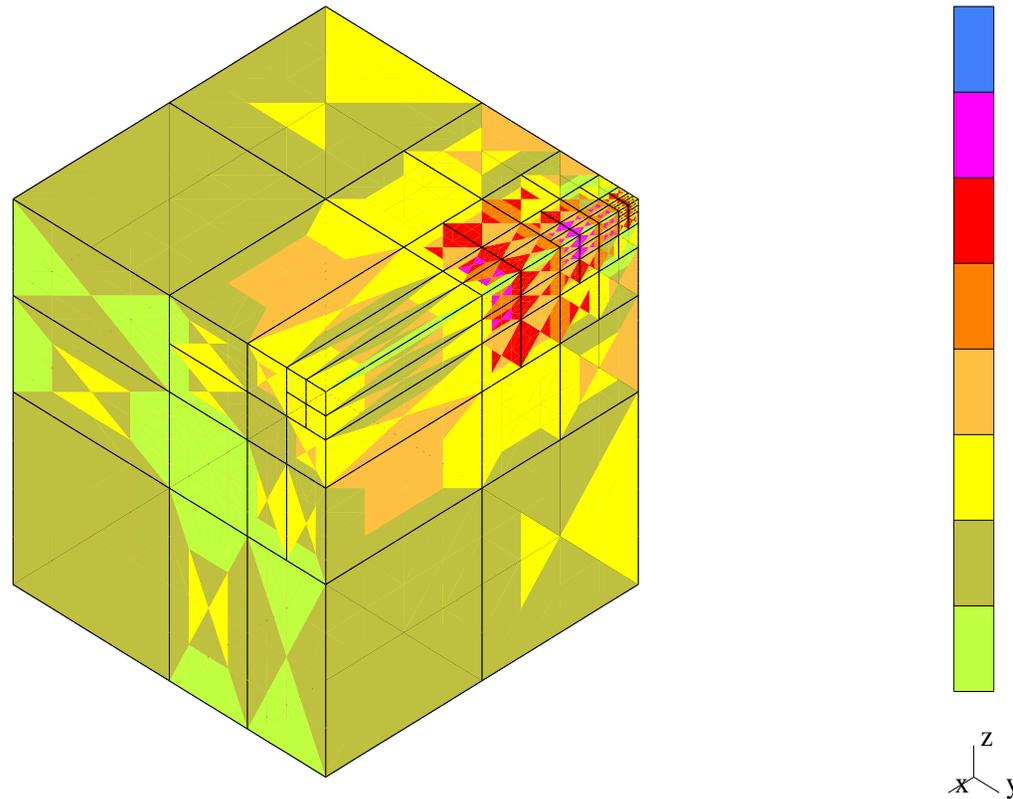
9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

Problema de Fichera. Mallado *hp*.



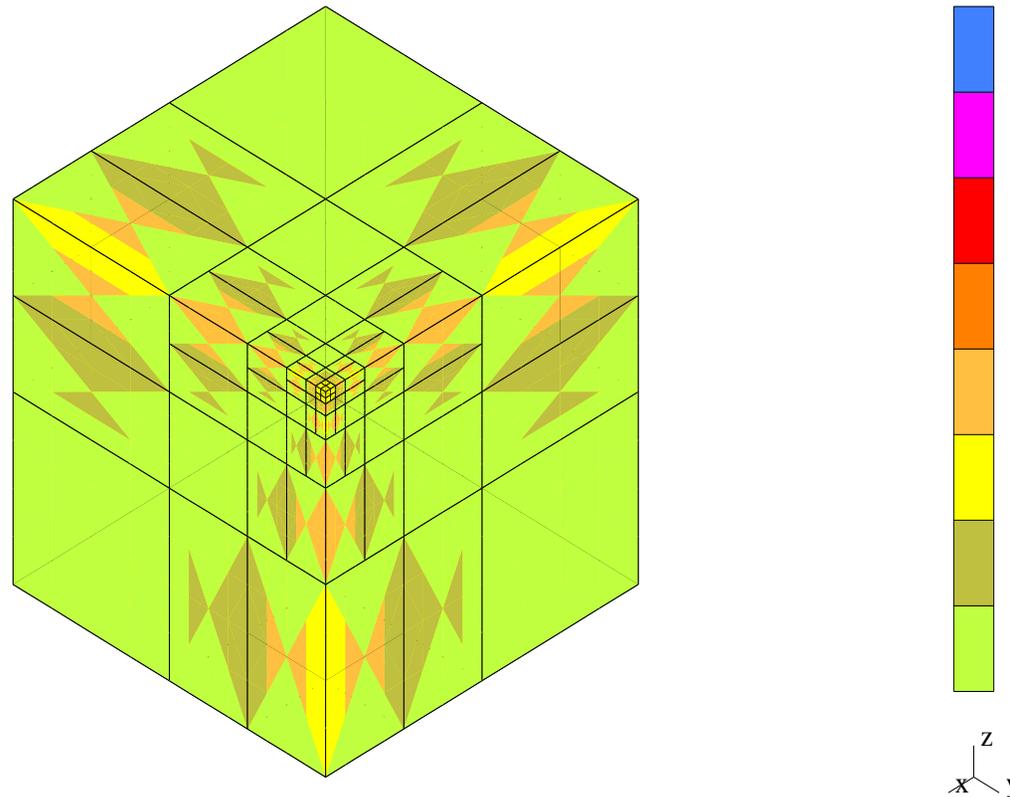
9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

Problema de Fichera. Mallado *hp*.



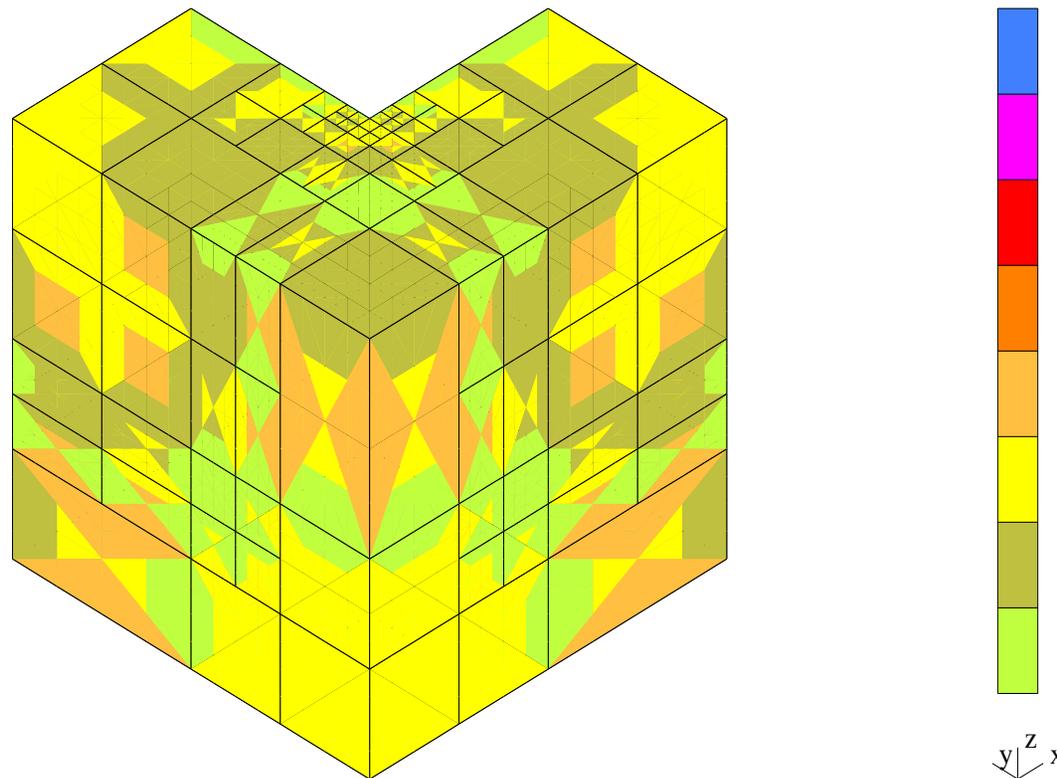
9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

Problema de Fichera. Mallado *hp*.



9. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

Problema de Fichera. Mallado *hp*.



10. CONCLUSIONES

- Utilizando el método de refinamientos automáticos en hp , obtenemos **convergencia exponencial**.
- Un **resolvedor de dos mallas** es un método iterativo **eficiente** aplicable a mallados NO uniformes en hp .
- Es posible guiar refinamientos automáticos en hp con una solución en la malla fina que sólo ha convergido parcialmente.
- **El método numérico presentado es aplicable a una gran variedad de problemas electromagnéticos de interés.**

10. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Posibles proyectos de investigación

APLICACIÓN DEL MÉTODO NUMÉRICO A OTROS PROBLEMAS

Problemas no lineales, dinámica de fluidos, ingeniería a mecánica, etc.

ACELERAR EL MÉTODO NUMÉRICO

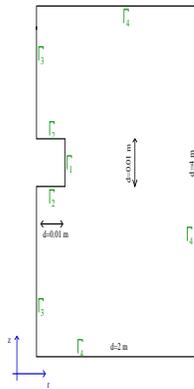
Permitiré a resolver problemas inversos, problemas estocásticos, o problemas que requieran soluciones múltiples (análisis de la sección de Radar, problemas en ingeniería a petrolí fera), etc.

CREAR UN ALGORITMO DE ADAPTATIVIDAD CON UN OBJETIVO

Este tipo de adaptatividad es fundamental en problemas electromagnéticos en ingeniería a petrolí fera.

10. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Para ciertas aplicaciones NO es adecuado usar una estrategia de refinamientos basados en la minimización del error de la energía.



Ecuación de onda: $\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times E \right) - (\omega^2 \epsilon - j\omega \sigma) E = -j\omega J^{imp}$

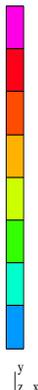
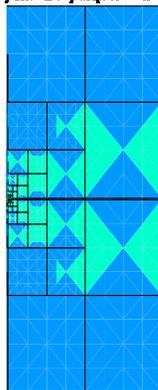
Condiciones en la frontera:

Conductor Perfecto (Dirichlet): $n \times E = 0$ on $\Gamma_2 \cup \Gamma_4$

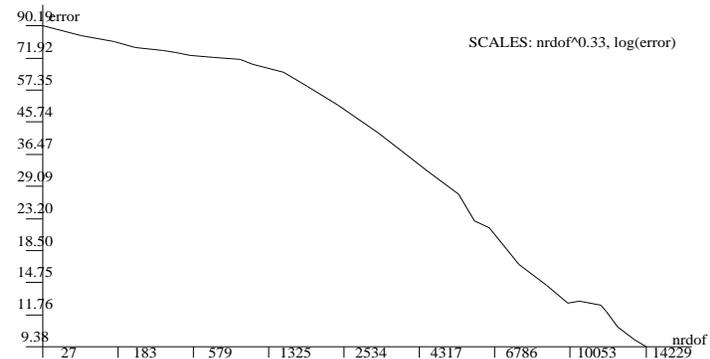
Neumann:

$$n \times \frac{1}{\mu} \nabla \times E = -j\omega$$
 on Γ_1 ; $n \times \frac{1}{\mu} \nabla \times E = 0$ on Γ_3

2Dhp90: A Fully automatic hp-adaptive Finite Element code

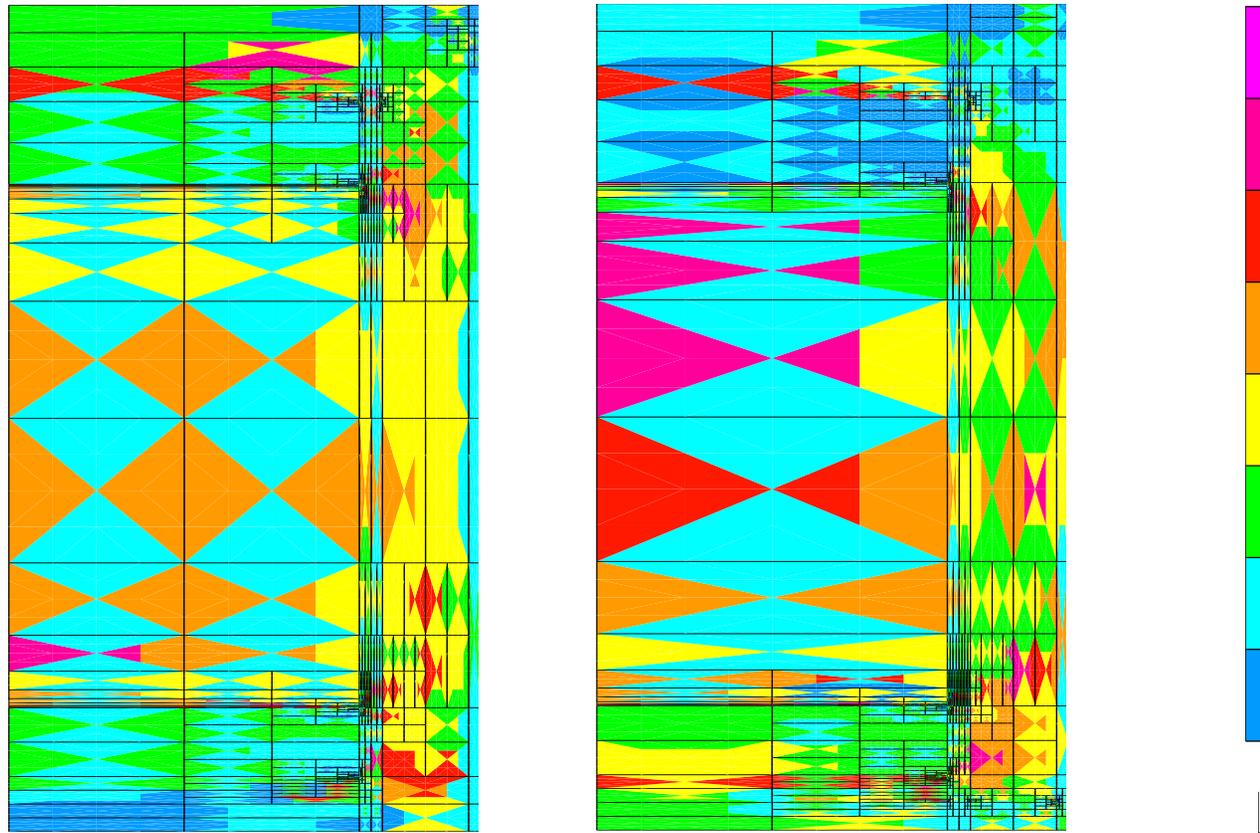


2Dhp90: A Fully automatic hp-adaptive Finite Element code



10. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Conducción del calor NO isotrópica



Agradecimientos a la empresa petrolífera BAKER-HUGHES por financiar este proyecto